EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

9e JAARGANG 1932/33, Nr. 2



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

☞ De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr G. SCHAAKE; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

Q_a in Q en R_a in R komt, dan is PQ = PR en $\angle$ QPR = 60°, daar $\angle$ QPC = 60° + $\frac{1}{3}\angle$ B, $\angle$ CPB = 180° — $\frac{1}{3}\angle$ B — $\frac{1}{3}\angle$ C en $\angle$ RPB = 60° + $\frac{1}{3}\angle$ C. $\triangle$ PQR is dus gelijkzijdig.

Klapt men $\triangle$ CPQ om CQ om, dan komt P in het punt P_b van CA.

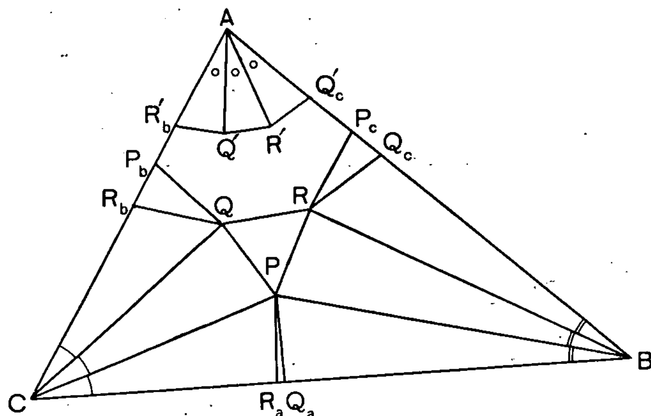


Fig. 6.

Klapt men $\triangle$ BPR om BR om, dant komt P in het punt P_c van AB.

Snijdt de cirkel om Q door P_b, de zijde AC nogmaals in R_b en snijdt de cirkel om R door P_c de zijde AB nogmaals in Q_c, dan heeft de vijfhoek AR_bQRQ_c de drie zijden R_bQ, QR en RQ_c gelijk, terwijl $\angle$ AR_bQ = 60° + $\frac{1}{3}\angle$ B, $\angle$ R_bQR = 120° + $\frac{2}{3}\angle$ C, omdat $\angle$ R_bQP_b = 60° — $\frac{2}{3}\angle$ B, $\angle$ PQR = 60° en $\angle$ P_bQP = 120° + $\frac{2}{3}\angle$ A. Evenzoo is $\angle$ QRQ_c = 120° + $\frac{2}{3}\angle$ B, terwijl $\angle$ RQ_cA = 60° + $\frac{1}{3}\angle$ C is.

Zij nu Q' een punt, binnen $\triangle$ ABC zóó gekozen, dat $\angle$ Q' AC = $\frac{1}{3}\angle$ A en trekt men door Q' een rechte, die AC snijdt in R_b', waarbij $\angle$ $AQ'R_b'$ = 60° + $\frac{1}{3}\angle$ C. Klapt men nu $\triangle$ $AQ'R_b'$ om AQ' om, dan komt R_b' in R' en klapt men $\triangle$ AQ'R' om AR' om, dan komt Q' in een punt Q_c' op AB. De vijfhoek $AR_b'Q'R'Q'_c$ heeft nu de drie zijden $R_b'Q'$, Q'R' en $R'Q_c'$ gelijk, terwijl de hoeken gelijk zijn aan de overeenkomstige hoeken van vijfhoek AR_bQRQ_c. De twee vijfhoeken zijn dus gelijkvormig en gelijk geplaatst, met A als gelijkvormigheidscentrum, zoodat Q ligt op AQ' en R op AR'. De lijnen AQ en AR deelen dus $\angle$ A in drie gelijke deelen, waarmede de stelling bewezen is.

In fig. 6 en in het bewijs in aangenomen, dat $\triangle$ ABC scherp-

hoekig is. Is de driehoek ABC stomp- of rechthoekig, dan worden bewijs en figuur lichtelijk gewijzigd.

6. Bij de voorafgaande meetkundige bewijzen is gebruik gemaakt van wat men wel noemt de methode der omkeering. Men leze hierover: J. V e r s l u y s, Over methoden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken, 4e druk, blz. 93 e.v.; in het bijzonder het laatste gedeelte (blz. 96). In plaats van uit te gaan van alle zes trisectrices, begint men met vier er van te beschouwen. Vervolgens brengt men op een bepaalde manier een driehoek aan, waarvan één

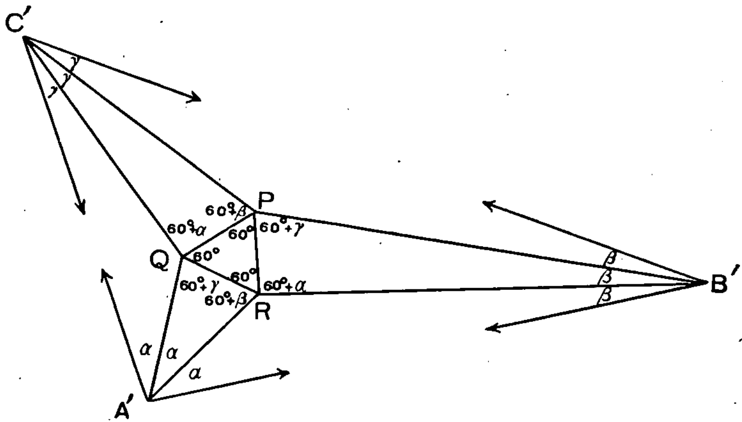


Fig. 7.

hoekpunt het snijpunt is van twee van deze vier trisectrices en de beide andere hoekpunten op de twee overschietende (van de vier) liggen. Het bewijs wordt nu voltooid, door aan te toonen, dat deze driehoek gelijkzijdig is en de lijnstukken, die de twee laatstbedoelde hoekpunten met het derde hoekpunt van de groote driehoek verbinden de resteerende twee trisectrices (van de 6) zijn. De samenstellers van deze bewijzen hebben natuurlijk niet op goed geluk de bewuste driehoek aangebracht, maar hebben blijkbaar nagegaan, aannemende, dat de te bewijzen stelling juist is, hoe de M o r l e y-driehoek, van vier trisectrices uitgaande, zich laat construeeren.

Deze methode der omkeering kunnen we nog consequenter toepassen, waardoor het bewijs al zeer overzichtelijk wordt. We kunnen namelijk de heele figuur opbouwen van binnen uit, dus beginnende met de gelijkzijdige driehoek PQR (zie fig. 7). Alleen weten we niet van te voren, waar deze moet komen te liggen, noch hoe

groot hij is. Dit is echter niet van het minste belang, daar bij een gegeven driehoek ABC de vorm van de driehoek, op de bekende manier bepaald door de trisectrices der hoeken, alleen van de grootte der hoeken van de driehoek kan afhangen. Lukt het ons nu, de M o r l e y-figuur van binnen uit zóó op te bouwen, dat we een driehoek met trisectrices enz. krijgen, gelijkvormig aan een willekeurig gegeven driehoek ABC, dan is dus het verlangde bewijs geleverd. Dit laatste kost weinig moeite (zie fig. 7). Op de zijden van een willekeurige gelijkzijdige driehoek PQR als basissen beschrijft men buitenwaarts de driehoeken

PQC′, waarin $\angle P = 60° + \beta$, $\angle Q = 60° + \alpha$,
QRA′, „ $\angle Q = 60° + \gamma$, $\angle R = 60° + \beta$
en RPB′, „ $\angle R = 60° + \alpha$, $\angle P = 60° + \gamma$.

Hierbij zijn de hoeken van de gegeven driehoek ABC weer 3α, 3β en 3γ genoemd. De tophoeken van deze driehoeken zijn dan opvolgend γ, α en β. Wentelen we nu b.v. de driehoeken PQC′ en PRB′ opvolgend om PC′ en PB′ om, dan zullen de zijden QC′ en RB′ in de nieuwe stand óf evenwijdig loopen, óf op één rechte liggen, daar $\angle PC'Q + \angle PB'R + \angle C'P'B' = 180°$ is.

Dat de laatste van deze twee mogelijkheden (op één rechte liggen) zich hier zal verwezenlijken en niet de eerste, blijkt hieruit, dat P gelijke afstand heeft tot QC′ en RB′ (dus ook na de wenteling), daar PQ = PR en $\angle PQC' = \angle PRB'$ is. Door ook nog de beide driehoeken om de andere opstaande zijden om te klappen en evenzoo met de derde driehoek (QRA′) te handelen, zien we, dat $\triangle$ A′B′C′ hoeken heeft, groot 3α, 3β en 3γ, dus gelijkvormig is met de gegeven driehoek ABC, en dat PQR de M o r l e y-driehoek is van $\triangle$ A′B′C′.

Daar $\triangle$ PQR gelijkzijdig is, is ook de M o r l e y-driehoek van $\triangle$ ABC gelijkzijdig.

Deze oplossing is van K. H a r l a a r.

7. We geven nu een elegant bewijs, voorkomend in de in de aanhef van dit artikel genoemde verhandeling van F. G l a n v i l l e T a y l o r en W. L. M a r r, waarbij gebruik gemaakt wordt van de stelling van Brianchon en haar omgekeerde. De lezer herinnert zich, dat reeds bij het eerste bewijs (van Dr. V e r r ij p) is gebleken, dat we slechts het concurrent zijn van de lijnen PL, QM en RN (zie fig. 1) behoeven aan te toonen om tot de gelijkzijdigheid van

$\triangle$ PQR te kunnen besluiten. In het nu volgend bewijs wordt eerst de hulpstelling bewezen, dat AP, BQ en CR door één punt gaan. Hieruit wordt dan met de stelling van Brianchon hetzelfde afgeleid ten aanzien van PL, QM en RN.

We geven het bewijs weer onvertaald. De lezer late zich niet afschrikken door de slechts schijnbare ingewikkeldheid van het bewijs van de hulpstelling. We zullen het straks nog iets anders inkleeden.

I. Let AP, BQ, CR meet BC, CA, AB in X, Y, Z respectively, also let X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 be the feet of perpendiculars, from P, Q, R respectively to the sides of ABC.

Then $\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{\triangle APB}{\triangle APC} \cdot \frac{\triangle BQC}{\triangle BQA} \cdot \frac{\triangle CRA}{\triangle CRB} =$

$= \frac{PZ_1}{PY_1} \cdot \frac{QX_2}{QZ_2} \cdot \frac{RY_3}{RX_3} = 1$, since bij similar triangles $\frac{QZ_2}{QY_2} = \frac{RY_3}{RZ_3}$; $\frac{RX_3}{RZ_3} = \frac{PZ_1}{PX_1}$; $\frac{PY_1}{PX_1} = \frac{QX_2}{QY_2}$.

Hence AP, BQ, CR are concurrent.

II. It is evident that ARBPCQ is a Brianchon hexagon; and taking the sides in the order LRMPNQ it follows that PL, QM, RN are concurrent. Let the point of intersection be O.

III. In the quadrilateral OMPN, since MO and NO bisect the angles at M and N, we easily obtain:
$\angle OMP = 30° + \beta$; $\angle ONP = 30° + \gamma$ and $\angle MPN = 120° + \alpha$; whence $\angle MON = 120°$, $\angle NOQ = \angle ROM = 60°$.

Hence the acute angles at O are each equal to 60°, the triangles ROL, QOL are congruent, and LR $=$ LQ.

Finally, RPL, QPL are congruent and PR $=$ PQ; whence it follows that PQR is equilateral.

Het bewijs van de hulpstelling is ook aldus te leveren. P heeft afstanden tot c en a, die zich verhouden als sin 2β en sin β, dus als 2 cos β en 1 en afstanden tot b en a, die zich verhouden als 2 cos γ en 1. De afstanden van P tot c en b verhouden zich dus als cos β en cos γ of als sec γ en sec β. Hetzelfde geldt dus voor alle punten van AP. Evenzoo hebben de punten van BQ afstanden tot a en c, die zich verhouden als sec α en sec γ. Voor het snijpunt S van AP en BQ zullen dus de afstanden tot a, b en c zich verhouden als sec α, sec β en sec γ. Nu liggen de punten binnen de driehoek, waarvoor de afstanden tot a en b zich verhouden als sec α en sec β,

alle op CR, daar voor R deze afstandsverhouding geldt. Bijgevolg ligt S op CR, m.a.w. AP, BQ en CR gaan door één punt S.

8. Het fraaie bewijs van Glanville en Marr bracht mij (zegt de Heer Harlaar) op het denkbeeld, eens te onderzoeken,

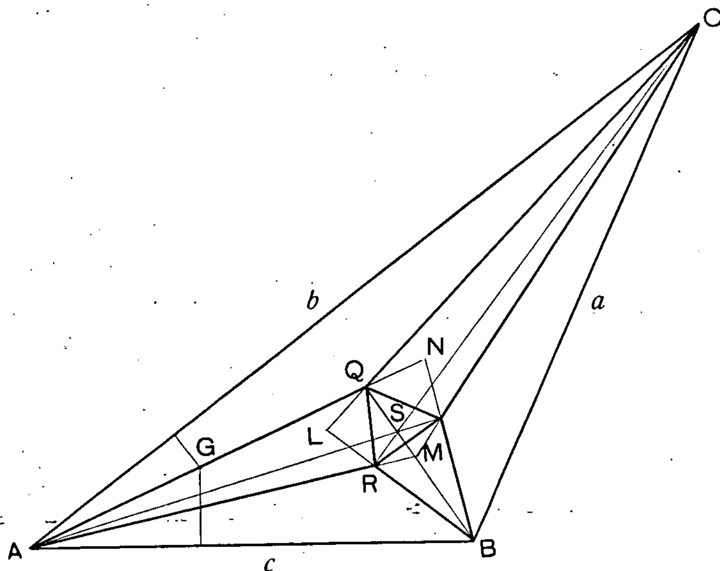


Fig. 8.

of het tweede gedeelte (waarbij de stelling van Brianchon te pas kwam) ook stereometrisch bewezen kan worden, dus door de vlakke figuur als projectie van een ruimtelijke te beschouwen. Dat lukt inderdaad zeer goed.

We nemen als bewezen aan, dat AP, BQ en CR elkaar in het punt S snijden (zie fig. 8) [1]) en stellen ons een viervlak voor met de hoekpunten A, B, C en S_r, waarbij S_r zich als S op het vlak van A, B en C projecteert. De punten buiten het vlak van A, B en C zullen we door de index *r* van hun projecties op dit vlak onderscheiden. P, Q en R beschouwen we als de projecties van de punten P_r, Q_r en R_r op de (door S_r verlengde) ribben van het viervlak. Daar AP_r en BQ_r elkaar snijden (in S_r), liggen A, B, P_r en Q_r in één vlak en snijden ook AQ_r en BP_r elkaar in een punt N_r.

---

[1]) In fig. 8 ligt M niet op BQ (vergelijk L en N), doch de afstand van M tot BQ is te klein om dit in de teekening duidelijk te kunnen laten uitkomen. De lezer brenge in de figuur nog de letter P aan tusschen M en N.

Nu is N_rR_r de snijlijn van de vlakken AR_rQ_r en BR_rP_r. Op overeenkomstige wijze definieeren we de punten M_r en L_r en blijken M_rQ_r en L_rP_r de snijlijnen te zijn opvolgend van de vlakken CQ_rP_r en AQ_rR_r en van BP_rR_r en CP_rQ_r. De lijnen N_rR_r, M_rQ_r en L_rP_r snijden elkaar in het gemeenschappelijke punt O_r van de drie vlakken, waarvan ze de snijlijnen zijn, zoodat hun projecties NR, MQ en LP eveneens door één punt O zullen gaan.

We kunnen bij de stereometrische inkleeding van het bewijs nog verder gaan en ons van het gebruik van de hulpstelling ontdoen. We verkrijgen namelijk onze ruimtefiguur van zooeven, door drie paar vlakken aan te brengen door de zijden van $\triangle ABC$. De twee vlakken door BC laten we met het vlak van de driehoek hoeken maken, waarvan de cotangenten opvolgend zijn $\cos \alpha$ en $2 \cos \beta \cos \gamma$. Voor de vier overige vlakken kiezen we de hoeken op overeenkomstige wijze. Is nu b.v. G_r een punt van de snijlijn der vlakken door b en c, die met het vlak van de driehoek de hoeken maken, opvolgend met de cotangenten $\cos \beta$ en $2 \cos \alpha \cos \beta$, dan verhouden de afstanden van G (projectie van G_r) tot b en c zich als $\cos \beta$ en $2 \cos \alpha \cos \beta$, dus als 1 en $2 \cos \alpha$ of als $\sin \alpha$ en $\sin 2\alpha$. AG is dus een van de trisectrices van $\angle$ A. Evenzoo blijken de andere trisectrices projecties te zijn van snijlijnen van de aangebrachte vlakken, voorts P, Q en R projecties van snijpunten P_r, Q_r en R_r van vlakkendrietallen, en eindelijk PL, QM en NR weer projecties van de snijlijnen van telkens twee van de drie vlakken P_rQ_rC, Q_rR_rA en R_rP_rB. Hieruit volgt het concurrent zijn van PL, QM en NR, waarna de drie paren congruente driehoeken, waarin zeshoek PMRLQN door deze drie lijnen verdeeld wordt, het aanvullend bewijsmateriaal voor de M o r l e y-stelling leveren.

We besluiten deze besprekingen van het M o r l e y-vraagstuk met een opwekking aan de belangstellende lezers, ook hun krachten er eens aan te beproeven. Wie een bewijs vindt, niet in wezen gelijk aan een der hier gegevene, zal ons met inzending daarvan verplichten.

P. W.

Na de lezing van het artikel in afl. I, die afgesloten werd met blz. 48, ontving de redactie van Dr. A. K e t t n e r het volgende, dat we gaarne een plaatsje geven.

Beschouw figuur 1 en plaats hier de Grieksche letters van figuur 3 in. Eerst wordt trigonometrisch aangetoond, dat AP, BQ en CR door een punt gaan en wel aldus. Noem $\angle$ RCB daarvoor $\angle C_1$ en $\angle$ RCA evenzoo $\angle C_2$. De lengte van AR, BR en CR wordt aangegeven door *k*, *l* en *m*. Nu is:

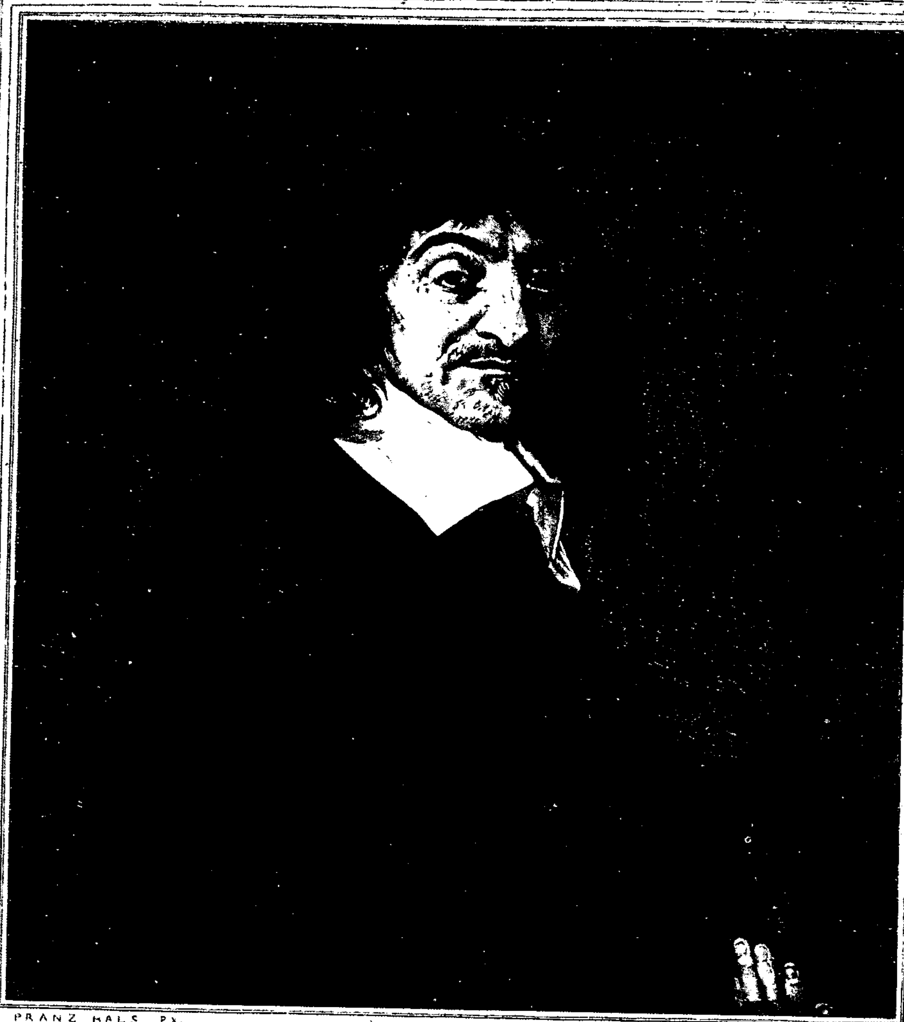
$$\sin C_1 : l = \sin 2\beta : m \text{ en } \sin C_2 : k = \sin 2\alpha : m \text{ dus}$$

$$\frac{\sin C_1}{\sin C_2} : \frac{l}{k} = \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sin \alpha \cos \alpha} : 1 \text{ en daar } \frac{l}{k} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{ is, dus}$$

$$\frac{\sin C_1}{\sin C_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Evenzoo te bewijzen $\dfrac{\sin A_1}{\sin A_2} = \dfrac{\cos \gamma}{\cos \beta}$ (2) en $\dfrac{\sin B_1}{\sin B_2} = \dfrac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$ (3)

Daar de betrekkingen (1), (2) en (3) met elkaar vermenigvuldigd, rechts van het gelijkteeken de eenheid opleveren, gaan AP, BQ en CR dus door één punt. Maar volgens Brianchon zijn dan de 6 trisectrices raaklijnen aan een kegelsnede. Hieruit volgt dan terstond, dat ook LP, RN en MQ door één punt gaan, het punt B_r. Verder is LP bisectrix in $\triangle$ BCL, $\angle$ CLP dus $30° + \alpha$ en dus $\angle B_rPM = 30° + \alpha + \gamma$ als buitenhoek. Evenzoo is $\angle B_rRM = 30° + \alpha + \gamma$, dus $\angle B_rPM = \angle B_rRM$. Hieruit volgt nu gemakkelijk, dat $\angle PB_rM = \angle RB_rM = 60°$. Alle hoeken bij B_r zijn dus 60°, terwijl $B_rP = B_rQ = B_rR$; dus is $\triangle$ PQR gelijkzijdig.



FRANZ HALS PX. ACHILLE JACQUET SC.

RENÉ DESCARTES

1596–1650

P. NOORDHOFF N.V. · GRONINGEN

De Uitgever verzoekt storting van het abonnementsgeld op postgironummer **6593** Groningen. 14 dagen na ontvangst dezer aflevering zal over het bedrag worden gedisponeerd met 15 cent verhooging voor incassokosten.

DESCARTES ALS WISKUNDIGE

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS. [1]

Wanneer men zich in groote lijnen een beeld voor den geest tracht te halen van de historische ontwikkeling der wiskunde vanuit haar sterk empirisch gebonden oorsprongen tot aan den tijd, waarin zij zich, alle contact met de ervaring of de voorstelling afschuddend, begint te ontplooien in de vrije scheppingen van menschelijk vernuft, die haar moderne phase typeeren, dan trekken, vóór alle andere, twee perioden om haar oorspronkelijke en intensieve productie de aandacht: de eerste is het bloeitijdperk der Grieksche wiskunde, dat de vierde en de derde eeuw voor Christus vult en waarin door het werk van geleerden als Eudoxos, Euclides, Archimedes en Apollonios aan de beoefening der zuivere wiskunde wegen worden geopend, welker einde in meer dan twintig eeuwen niet zou worden bereikt; de tweede is de tijd van groote opleving der West-Europeesche wiskunde, de 17e eeuw, die in een stormachtige ontwikkeling van inzicht en methode eerst den geheelen potentieelen rijkdom van de Grieksche conceptie der mathesis tot actueel bestaan gaat brengen.

Is het wonder, dat men, wanneer er aanleiding is, om over de geschiedenis der wiskunde het woord te voeren voor een gehoor, waarin, naast de vakgenooten in engeren zin, ook zij, die met de mathematische begrippenwereld niet dagelijks meer in aanraking komen, aan het te behandelen onderwerp den eisch kunnen stellen, dat het de belangstelling, die zij willen toonen, waard zal zijn, als vanzelf zijn gedachten getrokken voelt naar een van die twee reeds zoo vaak behandelde en niettemin in hare beteekenis nog steeds niet voldoend doorgronde tijdvakken?

De begrippen toch, die daarin zijn gevormd en de methoden, die toen zijn gevonden, hebben op de structuur van het wetenschappelijk denken en daardoor op de lotgevallen der menschheid invloeden uitgeoefend, waarvan de nawerking in onzen tijd menigmaal sterker wordt gevoeld dan die van eenige politieke of oeconomische gebeurtenis uit dezelfde perioden en de groote figuren, die toen

---

[1]) Overdruk van de „Openbare les, gegeven bij aanvaarding van het ambt van privaat-docent in de Geschiedenis der Wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Leiden op Woensdag 5 October 1932".

leiding gaven aan de mathesis, rijzen daardoor tot een cultuurhistorische beteekenis, waarvoor men inderdaad tot ver buiten mathematische kringen aandacht mag vragen.

Ik heb nu bij een vorige verwante gelegenheid een onderwerp gekozen uit den bloeitijd der Grieksche wiskunde en door een beschouwing van omvang en aard van het toen voor eeuwen gefixeerde getalbegrip trachten duidelijk te maken, hoe de strenge opvattingen der Grieken inzake oneindige processen tegelijkertijd hebben kunnen bijdragen tot de bevestiging van de fundeering der wiskunde en tot de remming van haar ontwikkeling. Thans, nu ik deze universiteit het mij toegestane onderwijs in de geschiedenis der wiskunde begin, wil ik iets mededeelen over de tweede van de genoemde perioden, over den tijd, waarin men, met vermindering van aandacht voor de hechtheid van het bouwsel, zich met volle kracht op de verdere voltooiing toelegt; ik beschouw daartoe een mathematicus uit de zeventiende eeuw, waarop bovendien de juist gemaakte opmerking aangaande de algemeen historische beteekenis van de groote wiskundigen uit dat tijdvak in hoogere mate dan op één ander van toepassing is en spreek over René Descartes als wiskundige. Ik wil trachten, eenerzijds de beteekenis te omschrijven, die zijn optreden voor de ontwikkeling der wiskunde heeft gehad, anderzijds althans door enkele opmerkingen de belangrijke vraag aan te roeren, welken invloed zijn mathematische geestesgesteldheid op zijn natuurwetenschappelijk en philosophisch denken heeft kunnen uitoefenen.

U zult nu wellicht geneigd zijn, op te merken, dat de eerste van de twee hierdoor gestelde opgaven onmiddellijk en in korte woorden is af te handelen. Ieder toch, die eenige historische ontwikkeling bezit, kan u vertellen, dat de beteekenis van Descartes voor de wiskunde voornamelijk heeft bestaan in de schepping der analytische meetkunde en iedere mathematicus, om nadere toelichting gevraagd, zal de grondgedachte van de daardoor ingevoerde methode gemakkelijk als volgt nader kunnen omschrijven, dat hij de punten van een plat vlak bepaalde door coördinaten ten opzichte van een assenstelsel, dat men later het Cartesiaansche zou noemen, d.w.z. door de positief of negatief gerekende afstanden tot twee, gewoonlijk rechthoekig op elkaar staande coördinaatassen, dat hij nu de z.g. geometrische krommen, die later de algebraische zouden

heeten, karakteriseerde door de algebraische betrekking, die voor elk van haar tusschen de coördinaten van haar punten bestaat en dat hij zoodoende de zuiver meetkundige, op de beschouwing van een figuur steunende, daardoor tot tal van gevalonderscheidingen genoopte en door geen algemeene methode samen te vatten redeneeringen der Grieksche wiskunde kon vervangen door algebraische, zonder figuur uitvoerbare, geen nadere onderscheiding behoevende en volgens vaste regels verloopende bewerkingen. Zoo ergens, dan schijnt wel hier voor het historisch onderzoek nauwelijks meer een probleem te zijn overgebleven.

De hiermee in het kort geschetste niet ongebruikelijke karakteristiek van het werk van Descartes als wiskundige, die men niet zelden ook in werken aantreft, waarin de schrijver, hoewel voornamelijk belangstellend in het leven en het philosophisch systeem van den wijsgeer, toch zijn verdiensten als mathematicus niet geheel stilzwijgend wil voorbijgaan, blijkt nu echter tegen historische kritiek, in het bijzonder tegen de vraag, nu eens nauwkeurig te omschrijven, welke eigenlijk de beslissende stap vooruit was, die met de schepping der nieuwe methode werd gedaan, slechts in zeer geringe mate bestand te zijn. Men kan haar ongetwijfeld aanvaarden als een korte omschrijving der analytische meetkunde, die, zooal niet ten tijde van haar ontstaan, dan toch zeker in de 18e en 19e eeuw volle geldigheid heeft bezeten, maar, wanneer men dan het mathematische hoofdwerk van Descartes, de *Géométrie,* opslaat en daarin vergeefs naar het Cartesiaansche assenstelsel zoekt en vergeefs naar een systematische uiteenzetting en volledige toepassing van het coördinatenbegrip, wanneer men noch van de rechte lijn, noch van een der kegelsneden de vergelijking ziet afleiden en niettemin een optredende vergelijking van den tweeden graad op juiste wijze als kegelsnede ziet interpreteeren, wanneer men dan ten slotte nog het derde Boek vrijwel geheel over de theorie der algebraische vergelijkingen ziet handelen en het nieuw gelegde verband van meetkunde en algebra evenzeer in de meetkundige oplossing van algebraische vergelijkingen ziet toepassen als in de algebraische behandeling van meetkundige problemen, dan kan men zich moeilijk onttrekken aan den indruk, dat, wat men als analytische meetkunde heeft omschreven, in het werk van Descartes, dat als haar geboorteplaats bekend staat, deels ontbreekt, deels als volkomen bekend wordt behandeld en gebruikt en dat de titel *Géométrie* den

sterk algebraisch getinten inhoud van het werk maar zeer onvolkomen dekt.

De indruk van verwarring, ja verbijstering, die ik u in het kort heb trachten te schetsen en die ieder wel eens moet hebben ondervonden, wanneer hij in het bezit van en in het vertrouwen op de historische kennis aangaande de ontdekking der analytische meetkunde, die door een soort van overlevering gangbaar schijnt te blijven, voor het eerst de behoefte gevoelde, die kennis toch ook eens te toetsen aan de oorspronkelijke bron en daartoe de *Géométrie* opsloeg, toont aan, dat het nog wel degelijk een historisch-mathematisch probleem is, wat eigenlijk de wezenlijke verdienste is, die Descartes zich door dit werk voor de ontwikkeling der wiskunde heeft verworven. Het moge aan beoefenaren van oudere takken der historische wetenschap wonderlijk in de ooren klinken, dat hun mathematische commilitones het nog niet eens zijn over een toch zoo fundamenteele vraag, de oprechtheid gebiedt echter, te erkennen, dat de indruk, die hierdoor wordt gewekt, de juiste is: de beoefening van de geschiedenis der wiskunde verkeert nog in haar kinderjaren en er zal nog veel van dergelijk detailwerk moeten worden verricht, voordat er voldoende betrouwbaar materiaal aanwezig is, om tot de meer synthetische beschouwingswijzen te kunnen komen, die men, ietwat voorbarig, niet zelden reeds in onzen tijd verlangt.

Om de beantwoording van de gestelde vraag voor te bereiden, zal het noodig zijn, in groote lijnen de ontwikkeling na te gaan van den tak der wiskunde, die, als gevolg van terminologische verwikkelingen, waarover we nog zullen moeten spreken, vanaf het begin der 19e eeuw als analytische meetkunde wordt aangeduid. We zullen daartoe terug moeten gaan tot de bakermat van onze wetenschappelijke denkwijzen, tot de Grieksche cultuur.

De Grieksche wiskunde heeft zich in de vijfde eeuw voor Christus geplaatst gezien voor een aantal meetkundige constructieproblemen, voornamelijk de trisectie van den hoek, de verdubbeling van den kubus en de quadratuur van den cirkel, die met de hulpmiddelen der elementaire meetkunde, zooals deze door Hippokrates van Chios waren gesystematiseerd, niet oplosbaar bleken te zijn. Door toepassing van de redeneermethode der analyse, die, naar de omschrijving van Pappos, bestaat in den weg vanaf het als bekend be-

schouwde gezochte langs de opvolgende gevolgtrekkingen tot iets, dat door synthese bekend wordt ondersteld, herleidde dezelfde Hippokrates het verdubbelingsprobleem tot de vraag, twee lijnstukken te construeeren, die als tweede en derde term met twee gegeven lijnstukken als eerste en vierde een gedurige evenredigheid vormen en dat onder den naam van constructie der twee middenevenredigen tot in de 17e eeuw het vernuft der beste mathematici zou prikkelen. Van de vele oplossingen, die de Grieken van dit probleem hebben gegeven, is voor ons doel het meest belangrijk de aan Menaichmos toegeschrevene, die, naar men vermoedt, de oorsprong is geweest van de theorie der kegelsneden. Deze oplossing bestaat hierin, dat men, de rij der lijnstukken voltooid denkend, opmerkt, dat het vierkant, op het tweede als zijde beschreven, gelijk moet zijn aan den rechthoek, die het eerste en het derde tot zijden heeft, terwijl de rechthoek der twee ingelaschte middenevenredigen aan den rechthoek der gegeven lijnstukken gelijk is. Beschouwt men nu elk dezer voorwaarden afzonderlijk, dan bepaalt elk van haar oneindig veel paren lijnstukken, die, opvolgend als abscis en ordinaat geinterpreteerd, aanleiding geven tot een kromme lijn; daarvan wordt de eerste, om het in de taal der Grieksche wiskunde te zeggen, gekenmerkt door het symptoom, dat het vierkant op de ordinaat gelijk is aan den rechthoek op de abscis en het eerste der gegeven lijnstukken, terwijl de tweede de meetkundige plaats is van het vrij gelegen hoekpunt van een rechthoek, waarvan een hoek in ligging gegeven is, en waarvan het oppervlak gelijk is aan dat van den rechthoek op de twee gegeven lijnstukken. Valt het in ligging gegeven hoekpunt nu samen met den top der eerste kromme, dan bepaalt een snijpunt der twee kromme lijnen, waarin de hedendaagsche hoorder natuurlijk onmiddellijk een parabool en een orthogonale hyperbool ontdekt, een rechthoek, welks zijden de twee gevraagde middenevenredigen zijn. Menaichnos vond nu verder, dat de beide gebruikte krommen voort te brengen waren, door een omwentelingskegel onder bepaalde voorwaarden met een plat vlak te snijden en de verdere bestudeering van de doorsneden, die bij wijziging van deze voorwaarden optreden, leidde de Grieksche wiskunde in een ontwikkeling, die langs Aristaios en Euclides tot de onvergankelijke *Conica* van Apollonios voerde, tot een ver uitgewerkte theorie der kegelsneden. Dat die krommen, die door Apollonios in verband werden gebracht met de planimetrische methoden

van aanpassing van oppervlakken en daarom met de namen van de verschillende soorten dier aanpassing, parabool, ellips en hyperbool, werden aangeduid, nu juist als doorsneden van een weldra scheef gedachten cirkelkegel konden worden verkregen, doet voor ons doel niet verder ter zake. Hoofdzaak is, dat zij alle drie werden gekarakteriseerd door symptomen, die met behulp van de methoden der oppervlakterekening, dus langs meetkundigen weg, verband legden tusschen de ordinaat van ieder punt van de kromme, dat is de afstand tot een willekeurige middellijn, gemeten in de daaraan door de kromme geconjugeerde richting en het lijnstuk, dat op die middellijn door haar snijpunt met de kromme en het voetpunt van de ordinaat werd bepaald. En van belang is verder, dat de aldus voorgestelde krommen systematisch werden gebruikt voor de oplossing van meetkundige problemen, waartegen de elementair-geometrische methoden niet bestand bleken te zijn. Zoo herleidt, om slechts een enkel voorbeeld te noemen, Archimedes het probleem, een bol door een plat vlak in deelen van gegeven inhoudsverdeeling te snijden, tot het vraagstuk, een gegeven lijnstuk zoo te verdeelen, dat het eene stuk zich tot een gegeven lengte verhoudt, zooals een gegeven oppervlak tot het vierkant op het overblijvende lijnstuk staat, van welk vraagstuk de Grieksche wiskundigen, onder nauwkeurige discussie van de grenzen van mogelijkheid, op verschillende wijzen een oplossing hebben gegeven, waarin een der gevraagde stukken als abscis van het snijpunt van twee kegelsneden wordt gevonden.

De geschetste behandelingswijze, waarvan het kenmerkende vooral werd gezien in het analytisch karakter, dat de opsporing van betrekkingen tusschen bekende en onbekende, maar tijdelijk als bekend behandelde grootheden bezit, heeft zich ontwikkeld tot een zelfstandigen tak der Grieksche wiskunde, die zeer waarschijnlijk door Pappos wordt bedoeld, wanneer hij in een bekende passage van de *Collectio Mathematica* met den blijkbaar als afkorting ingeburgerden naam *Analuomenos* een tak der hoogere wiskunde omschrijft als een afzonderlijk onderwerp, bestemd voor hen, die na kennisname van de algemeene elementen, het vermogen willen verwerven, de hun voorgelegde vraagstukken op het gebied van de kromme lijnen op te lossen. Zij werd na de publicatie van de vertaling van de *Collectio* door Commandino in 1588 bekend onder mathematici van West-Europa en Descartes moet haar ongetwijfeld

bij de Jezuiten van La Flèche in de werken van Clavius hebben leeren kennen; het is aannemelijk, dat hij haar bedoelt, wanneer hij in het *Discours de la Méthode* als een der wortels van zijn eigen meetkunde l'Analyse des Anciens vermeldt en dat we aan haar moeten denken, wanneer we de commentatoren van de *Géométrie*, van Schooten en Florimond de Beaune, over geometrische analyse hooren spreken.

Het zal u nu echter reeds lang duidelijk zijn geworden, welke de mathematische beteekenis van deze geometrische analyse is; wanneer men haar overbrengt uit de taal der oppervlakterekening in die der algebra, gaat ze over in een analytische meetkunde der kegelsneden, welker vergelijkingen de algebraische uitdrukkingen zijn van de Grieksche symptomen; daarbij komt weliswaar die analytische meetkunde niet in haar vollen omvang voor den dag en blijkt ook de coördinatenmethode nog niet de volle draagwijdte te bezitten, die de consequente toepassing van negatieve coördinaten met zich mee brengt, maar het gronddenkbeeld, kromme lijnen te karakteriseeren door een betrekking tusschen de coördinaten van hare punten, is er in volkomen helderheid in uitgesproken. En ook het gebruik, dat Archimedes in het geciteerde vraagstuk van de methode der kegelsneden maakte, onthult bij algebraische vertaling onmiddellijk zijn intrinsieke beteekenis: het is niets anders dan de graphische oplossing van een vergelijking van den derden graad met behulp van twee tweedegraadskrommen in den trant, waarin het derde Boek der *Géométrie* soortgelijke problemen zal behandelen.

Wanneer dus Descartes kort voor het einde van het eerste Boek van de *Géométrie* opmerkt, dat, indien men in een betrekking tusschen twee variabele coördinaten er één een oneindige verzameling waarden laat doorloopen en nu telkens de bijbehoorende waarde der andere bepaalt, door de verzameling van de verkregen coördinaten een kromme lijn wordt voorgebracht, dan is er blijkbaar geen aanleiding, hierin, zooals men wel doet, de eerste formuleering van de grondgedachte der analytische meetkunde te zoeken: dit inzicht was, toen Descartes met zijn werk begon, reeds twintig eeuwen oud en het schijnbaar zoo verwonderlijke feit, dat het zoo zonder eenigen ophef terloops wordt vermeld, vindt hierin zijn gereede verklaring.

Men zou nu kunnen vragen, of de originaliteit van de Cartesische hervorming der wiskunde, zoo zij dan niet heeft bestaan in het

denkbeeld, kromme lijnen door betrekkingen tusschen coördinaten te karakteriseeren, wellicht gelegen kan zijn in de verheldering, die het algemeene begrip van de functioneele afhankelijkheid tusschen twee variabelen door de invoering van graphische voorstellingen heeft ondergaan of, zooals men herhaaldelijk lezen kan, in de eerste opvatting der gedachte, de algebra op de meetkunde toe te passen?

Het antwoord op beide vragen moet, hoewel in verschillende mate, ontkennend luiden. De eerste opvatting is bepaald onjuist te noemen. Graphische voorstellingen van functioneele relaties behooren, zooals uit de werken van Oresme blijkt, in de 14e eeuwsche Scholastiek reeds tot de bekende en principieel helder begrepen hulpmiddelen voor onderzoekingen in en buiten de wiskunde; in het begin van de 17e eeuw werden ze door Galilei vruchtbaar toegepast in zijn kinematische onderzoekingen over de valbeweging. Ook op dit gebied kon Descartes weinig nieuws meer brengen.

De tweede der voorgestelde opvattingen daarentegen mag alleen om vaagheid van formuleering en gedachte worden afgekeurd en we zullen door haar wat te preciseeren, voor het eerst na al de verkregen negatieve resultaten tot een positieve beantwoording van onze vragen kunnen komen. Want inderdaad: het is niet de gedachte op zich zelf, de algebra op de meetkunde toe te passen, die het werk van Descartes kan karakteriseeren. Die toepassing had bestaan, zoolang men algebra en meetkunde gezamenlijk beoefend had en ze was vooral in de werken van Raffaelo Bombelli en Marino Ghetaldi gesystematiseerd tot de methode, die thans nog in de elementaire meetkunde onder den naam van algebraische analyse gangbaar is. Descartes echter deed meer: hij zag in alle scherpte de vruchtbaarheid van de gronddenkbeelden van de Grieksche geometrische analyse; haar, niet de elementaire Euclidische meetkunde, raakte hij aan met den tooverstaf der algebra. En die Algebra verkeerde reeds niet meer in het syncopische stadium, waarin het gebruik van getallencoefficienten elke algemeene behandeling van een probleem had uitgesloten; ze had zich ook reeds bevrijd van de omslachtige en ondoorzichtige notatie, die de Cossisten voor haar toepassing hadden ingevoerd; en ze was, in de door Franciscus Vieta geschapen symboliek, als Algebra Speciosa voor het eerst in de gedaante verschenen, die haar in staat zou stellen, de belangrijke functie te vervullen, die haar in de wiskunde wachtte. Descartes vereenigde dus, zooals hij zelf meer dan eens



Opname Oct. 1932

Prof. Dr. G. SCHAAKE

Geboren te Amsterdam in 1892; van 1918-1926 leeraar aan de Gooische H.B.S. te Bussum; promoveerde in 1922 aan de Universiteit van Amsterdam, werd in 1926 privaat-docent aan dezelfde Universiteit.

Sedert 1931 hoogleeraar in de Meetkundige vakken aan de Rijksuniversiteit te Groningen

zegt, l'Analyse des Anciens et l'Algèbre des Modernes tot één wetenschap en het was de Analytische Meetkunde, die uit die vereeniging van klassiek wiskundig denken en moderne mathematische techniek werd geboren. Het was een denkbeeld, dat in dien tijd als het ware in de lucht hing en dat dan ook, zooals in de geschiedenis der wiskunde zoo vaak gebeurd is, vrijwel gelijktijdig door twee mathematici onafhankelijk van elkaar werd verwezenlijkt. Reeds voor het verschijnen der *Géométrie* toch had Fermat in zijn *Ad locos planos et solidos isagoge,* die in manuscript bij de Parijsche mathematici circuleerde, volgens de nieuwe methode de rechte lijn en de kegelsneden behandeld en het is slechts aan de late publicatie van dit geschrift in 1679 te wijten, dat hij niet, in even hooge mate als zijn evenknie en tijdgenoot, op de verdere ontwikkeling van de analytische meetkunde invloed heeft kunnen uitoefenen.

Met de tot dusver gegeven karakteristiek is nu echter het aandeel in de hervorming der wiskunde, dat in de gezamenlijke productie van Vieta, Fermat en Descartes aan den laatste toekomt, nog geenszins afdoende omschreven. In tegenstelling tot Fermat namelijk, die zich in zijn verhandeling nog strikt had gehouden aan de weliswaar principieel belangrijke, maar technisch nog niet volmaakte notatie van Vieta en die ook de methoden van de Algebra Speciosa niet verder tot ontwikkeling had gebracht, voerde Descartes verschillende verbeteringen en vereenvoudigingen in de symboliek in, terwijl hij tot de theorie der algebraische vergelijkingen bijdragen leverde, die, gezien den achterstand, waarin de algebra ten opzichte van de meetkunde nog steeds verkeerde, voor den verderen groei van de analytische meetkunde van meer belang waren dan eenige meetkundige vondst had kunnen zijn.

Wanneer ik nu het tot dusver gezegde samenvat in de uitspraak, dat de verdienste van Descartes bij het schrijven van de *Géométrie* voornamelijk hierin heeft bestaan, dat hij de geometrische analyse der ouden overbracht in de taal der symbolische algebra, dat hij die taal verrijkte en dat hij haar schriftelijke weergave verbeterde, en wanneer ik zoo doende nog eens nadruk leg op het feit, dat de inhoud dien hij hiermede in een nieuwen vorm kleedde, door hem niet was geschapen, en nauwelijks uitgebreid, dan vrees ik, dat door deze formuleering de waarde van zijn daad voor de niet-wiskundigen onder u nog niet in het juiste licht zal zijn geplaatst. Zij zullen wellicht geneigd zijn, aan een verbetering in de schrijf-

wijze van de algebraische betrekkingen geen al te groote historische beteekenis toe te kennen en het sterke accent, dat het gebruik van de terminologie van het vertalen op zuiver formeele eigenschappen schijnt te leggen, zal er niet toe kunnen bijdragen, hun waardeering hooger te stemmen. In de wiskunde mag echter de betrekking, waartoe inhoud en vorm tot elkaar staan, geenszins worden opgevat als een tegenstelling tusschen het essentieele en het bijkomstige. Steeds weer toch leert de geschiedenis, hoe vaak eerst zuiver formeele verbeteringen in nomenclatuur en zuiver schrijftechnische wijzigingen in de symboliek de ware vruchtbaarheid van een, wellicht reeds lang geleden geconcipieerde wiskundige gedachte aan het licht hebben gebracht en hoe vaak woorden en symbolen de wiskundigen hebben gedwongen tot stappen, waarvoor hun denken aanvankelijk terugdeinsde. Men kan daardoor vorm en inhoud van een mathematisch werk niet los van elkaar beschouwen en wat men, met een onvolkomen beeldspraak, een wiskundige vertaling noemt, kan onder omstandigheden een praestatie van de hoogste orde zijn. Die omstandigheden echter zijn in de *Géométrie* van Descartes verwezenlijkt.

En daarbij is dan nog de wellicht allerbelangrijkste daad, die hij voor de wiskunde heeft verricht (ook ditmaal trouwens niet als eenige, omdat Bombelli hem hierin reeds was voorgegaan) nog niet eens ter sprake gekomen.

Om in te zien, waaruit zij bestond, moeten we beginnen met op te merken, dat de klassieke geometrische analyse in verband met het wezen van de oppervlakterekening nooit toepasbaar kon zijn op krommen van hoogeren dan den tweeden graad, al hebben de Grieken natuurlijk met behulp van andere denkmiddelen wel algebraische krommen van hoogeren graad en transcendente krommen behandeld. De oppervlakterekening toch bedient zich van relaties tusschen oppervlakken van vlakke figuren; in de algebraische formuleering van haar uitspraken treden daardoor nooit termen van hoogeren dan den tweeden graad op en, terwijl een product van drie factoren zich nog wel zou laten terugvertalen in een principieel denkbare, maar nooit uitgewerkte volumerekening, is de meetkundige interpretatie van producten van hoogeren graad wegens de driedimensionaliteit van de ruimte der Grieksche wiskunde uitgesloten. Het zal in verband hiermee dadelijk begrijpelijk zijn, waarom Fermat, wiens werk zich zeer nauw aan dat der Grieken aansluit,

niet verder dan tot de kegelsneden komt. Maar het wordt een nieuw probleem, hoe Descartes er wel in slaagt, met zijn methode hoogere graads-krommen te behandelen.

Men zal nu wellicht geneigd zijn, op te merken, dat dit natuurlijk hierdoor komt, dat de coördinaten, waartusschen in de analytische meetkunde der 17e eeuw betrekkingen worden gevestigd, evengoed als de coëfficienten, die in die betrekkingen voorkomen, reëele getallen zijn, dat die getallen, om het in moderne taal te zeggen, een lichaam vormen, dat dus iedere term van een vergelijking, onafhankelijk van zijn graad, weer een getal voorstelt en dat daardoor alle dimensiemoeilijkheden, waarmee de Grieksche oppervlakterekening te kampen had, vanzelf vervallen. Dit antwoord, hoezeer ook schijnbaar voor de hand liggend, is echter niet te aanvaarden: een coördinaat is bij Descartes evenmin een getal als in de Grieksche wiskunde, omdat hij evenmin als deze irrationale getallen kent; een coördinaat is een lijnstuk zelf, niet de lengte daarvan en wanneer, zooals bij Vieta, een product van twee lijnstukken een oppervlak en een van drie een volume zal blijven beduiden, dan zijn de dimensiemoeilijkheden bij de algebraische formuleering van de oppervlakterekening evengroot als in de meetkundige inkleeding. Ze worden zelfs niet verminderd, wanneer men, zooals Vieta ook weer doet, producten van hoogeren graad, ondanks de onmogelijkheid van geometrische interpretatie, formeel aanvaardt. Want de eisch van homogeniteit, die de grondwet is van de Algebra Speciosa, moet dan toch steeds aan de termen van de vergelijking worden gesteld en de historie leert, dat, wat men later als opzettelijke kunstgreep met zooveel succes ten bate van de meetkunde zou invoeren, in den tijd, dat het als noodzaak werd gevoeld, sterk remmend op de algebra heeft gewerkt.

Op dit punt komt nu echter de geniale greep van den eminenten mathematicus Descartes reddend tusschenbeide. Hij stelt vast, dat, evengoed als de som, ook het product van twee lijnstukken een lijnstuk zal zijn, namelijk de vierde evenredige tot het eenheidssegment en de twee gegevene; daaruit volgen de definities van deeling, machtsverheffing en worteltrekking. De lijnstukken vormen nu, mits men zich ook negatieve coördinaten consequent toegepast denkt (wat bij Descartes nog niet het geval is) eveneens een lichaam, dat met het lichaam der reëele getallen isomorph is; daardoor zijn alle dimensiemoeilijkheden evengoed opgeheven, als wan-

neer men de termen van een vergelijking als getallen interpreteert en de weg naar de algemeene algebraische behandeling van de geometrische krommen ligt open.

Ik hoop, dat ik u, zonder te veel in mathematechnische details af te dalen, een indruk heb kunnen geven van de essentieele verdiensten, die Descartes zich door zijn *Géométrie* voor de ontwikkeling der wiskunde heeft verworven; men kan rustig de volstrekte onjuistheid erkennen van de karakteristiek „proles sine matre creata", die Michel Chasles van zijn werk heeft gegeven en niettemin volharden in de traditioneele opvatting, die met zijn optreden in de geschiedenis van de wiskunde evengoed een nieuwe aera laat beginnen als in die der wijsbegeerte. Want de waarde van de allergrootsten onder de scheppende mathematici wordt niet verminderd door het feit, dat zij veelal niet schiepen ex nihilo, maar met gebruikmaking van wat er vruchtbaar was in het werk van hun voorgangers, vorm gaven aan wat vaag werd gezien door meer dan een tijdgenoot. En aan den anderen kant wordt hun historische beteekenis wel verhoogd door de overweging, dat hun geschriften, vaak zonder dat ze het zelf konden vermoeden, steeds de kiemen bleken te bevatten voor nieuwe, soms eerst jaren later tot ontwikkeling komende gedachtensystemen, aan welker waarde zij daardoor indirect deel hebben. Zoo ook bij Descartes. Wanneer men de geschiedenis van de wiskunde in de 17e eeuw overziet, dan bespeurt men zijn invloed vrijwel overal, waar nieuwe wegen worden ingeslagen en men kan elders onvolkomen assimilatie van zijn denkbeelden als oorzaak van vertraging in de mathematische productiviteit aanwijzen. Hij wekt natuurlijk in de eerste plaats nieuw leven op het gebied van zijn eigen werkzaamheid, waarop zijn landgenoot de Beaune, de Nederlanders van Schooten, Hudde en Johan de Witt en de Deen Bartholinus zijn onmiddellijke volgelingen zijn. De gaven van een uitmuntend mathematicus als Barrow komen niet voldoende tot haar recht, omdat hij de nieuwe methode versmaadt ter wille van een zuiver geometrisch ideaal; daarentegen schept Newton, de denkbeelden van Barrow met behulp van die methode verder ontwikkelend, in de differentiaal- en integraalrekening het machtigste hulpmiddel, dat de wiskunde nog had bezeten, terwijl Leibniz, die dezelfde vondst gelijktijdig doet, ondanks al zijn critiek op het Cartesianisme, vol-

mondig toegeeft, dat eerst de kennismaking met het werk van Descartes hem tot zijn ontdekking in staat heeft gesteld.

Dit zijn alles onmiddellijk aanwijsbare invloeden van de Cartesiaansche hervorming der wiskunde; er zijn andere, die meer in het verborgen en op langen termijn hebben gewerkt; zoo is de ontwikkeling van het getalbegrip vanuit de strenge beperkingen der Grieksche wiskunde tot de wijdte, die het in de 19e eeuw definitief zou verkrijgen, in hooge mate beinvloed door het denkbeeld, de termen van een algebraische vergelijking als lijnstukken te interpreteeren. Er bestond immers niet het minste aanschouwelijke verschil tusschen een lijnstuk, dat een rationalen wortel van een algebraische vergelijking voorstelde en een, dat als oplossing voor den dag kwam in een geval, waarin de berekening van den wortel afstuitte op de moeilijkheden van het irrationale. Is het wonder, dat men zich steeds meer begon te bevrijden van de klassieke vrees voor het irrationale, en dat men, een door Stevin verdedigd denkbeeld aanvaardend, irrationale en rationale grootheden, die toch ook in de lettersymboliek der Algebra zich door niets onderscheidden, zonder veel hoofdbreken onder één getalbegrip ging samenvatten?

Alvorens nu over te gaan tot het tweede gezichtspunt, van waaruit ik de relatie van Descartes tot de wiskunde wil beschouwen, moet ik nog een oogenblik stilstaan bij een terminologische kwestie, die, hoewel schijnbaar slechts woorden betreffend, toch wegens de verwarring, die ze pleegt te veroorzaken, voor de geschiedenis van de wiskunde van belang is. Het is de vraag naar het bestaansrecht en de eigenlijke beteekenis van den term Analytische Meetkunde, dien men, zooals ik reeds opmerkte, vóór de 19e eeuw niet aantreft en waarmee dus noch Descartes, noch een van zijn commentatoren de nieuwe methode heeft aangeduid. Het zal u nu reeds opgevallen zijn, dat deze term voor een vereeniging van meetkundige analyse en symbolische algebra historisch ook nauwelijks te verklaren of te verdedigen zou zijn geweest. Dat echter de algebra en weldra de infinitesimaalrekening de klassieke analytische methode tot een zoo vruchtbare toepassing bleken te kunnen brengen, werkte er sterk toe mee, dat men langzamerhand het analytische karakter der methode met het algebraische begon te identificeeren. De term analyse is daardoor geworden tot een verzamelnaam voor algebra en infinitesimaalrekening en de analytische meetkunde kan, zoo men wil, sindsdien worden opgevat als een meetkunde, waarin men van

de hulpmiddelen van de analyse in den modernen zin van het woord gebruik maakt. Die opvatting blijkt echter het historisch inzicht in de ontwikkeling van de analytische meetkunde vaak te vertroebelen; wanneer men b.v. in onzen tijd volhoudt, dat de Grieksche methode ter behandeling van derde-graadsproblemen daarom geen analytische meetkunde mag heeten, omdat de meetkundige redeneering er niet analytisch in wordt geformuleerd, dan blijkt de terminologische verwarring, die het woord analyse veroorzaakt, al zoover te zijn gegaan, dat men aan de Grieksche methode juist dat praedicaat onthoudt, dat, naar klassieke opvatting, haar meest wezenlijke kenmerk uitdrukt. Men ziet daarbij, zooals reeds Leibniz heeft opgemerkt, over het hoofd, dat men wel analytisch kan redeneeren buiten de analyse en dat binnen haar grenzen synthetische redeneeringen evengoed als elders voorkomen.

Wanneer ik nu overga tot het tweede deel van mijn onderwerp, tot de vraag dus, welke beteekenis de wiskunde voor het Cartesiaansche denken in het algemeen gehad heeft, wil ik er in de eerste plaats aan herinneren, dat, toen Descartes de *Géométrie* in 1637 samen met de verhandelingen *La Dioptrique* en *Les Météores* uitgaf, hij aan deze drie geschriften de inleiding deed voorafgaan, die onder den titel *Discours de la Méthode* een zelfstandige plaats onder de klassieke werken zoowel van de philosophie als van de Fransche letterkunde zou gaan innemen. Van de wetenschappelijke denkwijze, waarover het *Discours* handelde, moesten de physische en mathematische werken, die erop volgden, de *Essays* zijn, de proefstukken, die haar doeltreffendheid zouden aantoonen en wel is het, volgens Descartes zelf, vooral de *Géométrie*, waarin haar werking wordt gedemonstreerd.

Men zou dus eigenlijk mogen verwachten, dat de lectuur van het *Discours* en de studie van de *Géométrie* elkaar tot op zekere hoogte zullen kunnen aanvullen, dat men in het eerste werk algemeene methodische beginselen ontwikkeld zal vinden, die in het tweede een concrete toepassing op meetkundige problemen ontvangen en dat omgekeerd de kennisname van de analytische meetkunde ertoe zal kunnen bijdragen, de Cartesiaansche methodiek beter te begrijpen.

In deze verwachting nu wordt men, het *Discours* lezende, teleurgesteld. Men treft wel algemeene beschouwingen aan over den historischen samenhang tusschen de wiskundige denkwijze en de algemeene wetenschappelijke methode, maar het blijkt, zooals ik hier

zonder bewijs moet meedeelen, even onmogelijk in de vier befaamde regels voor het denken, die Descartes in het tweede deel van het geschrift opstelt, de gronddenkbeelden van de analytische meetkunde terug te vinden, als in de *Géométrie* de verlangde verduidelijking van het *Discours* op te sporen.

Gelukkig bezitten we in de *Regulae ad directionem ingenii* een tweede werk over de methode van ouderen datum, dat de gedachtengangen, waarvan het *Discours* een uiterst beknopte en daardoor niet overal begrijpelijke samenvatting geeft, in een uitvoerige, heldere en zeer aangenaam leesbare uiteenzetting ontwikkelt. Gaan we nu in het kort na, wat de lectuur van de *Regulae* ons voor ons doel kan leeren, dan vinden we in de eerste plaats het betoog, dat er geen andere wegen zijn, om langs verstandelijken weg tot de ware kennis te komen dan de intuitie, die in het natuurlijk licht der rede enkele fundamenteele dingen als evident doet zien en de deductie, die uit de aldus verworven grondslagen exacte conclusies trekt.

Voor de vruchtbare toepassing van deze twee kenmiddelen is nu echter voor alles een methode noodig; wie zonder methode tot de waarheid wil komen, is niet verstandiger dan iemand, die zoo brandt van dwaze begeerigheid, dat hij de straat opgaat, om te zoeken, of daar niet ergens een schat ligt, die een reiziger heeft verloren. Die methode nu — de schrijver is vast overtuigd van haar eenigheid — vindt men in ingekleeden vorm en daardoor soms nauwelijks herkenbaar toegepast in de wiskunde der Ouden; Diophantos en Pappos bewaren er de sporen van en de Platonische eisch van mathematische scholing van den philosoof kan niet anders worden verklaard dan met het oog op het inzicht in de methodische waarde, die aan de ware wiskunde moet worden toegekend. Later hebben echter de wiskundigen, door ijdelheid verleid, omdat ze vreesden, dat hun vondsten te weinig bewonderd zouden worden, indien ze te gemakkelijk leken, de toepassing van de methode verdoezeld en hun werk is ontaard in beuzelarijen over getallen en figuren zonder eenig nut. Ten slotte echter hebben enkele scherpziende geesten de ware denkkunst, de universeele mathesis, teruggevonden, waaruit de methode eigenlijk bestaat. Het is de algebra, mits ontdaan van de veelvuldige en onbegrijpelijke teekens, waardoor ze nog vaak wordt ontsierd. Die Algebra, blijkbaar dus de Algebra Speciosa van Vieta in haar door Descartes zelf verbeterde gedaante, leert in algemeenen vorm en onder abstractie van den bijzonderen aard van het

probleem, dus onverschillig of het tot de Arithmetica, de Geometrie, de Muziek, de Optica of de Astronomie behoort, de quantitatieve relaties behandelen, die tusschen de optredende dimensies, dat zijn alle meetbare grootheden, bestaan.

Op dit punt van de *Regulae* gekomen, zou men den indruk kunnen krijgen, dat de methode uit niets anders bestaat dan uit de algebraische behandeling van de quantitatief geformuleerde problemen van iedere wetenschap. Die indruk blijkt echter eenzijdig te zijn; als kenmerken van vatbaarheid voor methodische behandeling worden namelijk genoemd *ordo* en *mensura,* waarin de term *ordo* een rangschikking van proposities in deductieve ketens schijnt aan te duiden, terwijl *mensura* de vatbaarheid voor quantitatieve behandeling tot uiting brengt; de methode blijkt dus in zich zelf de indeeling te volgen, die de wiskunde tusschen geometrisch en arithmetisch-algebraisch denken kent.

De *Regulae* leeren nu verder, hoe de methode moet worden toegepast; voorgeschreven wordt de herleiding van ingewikkelde en duistere proposities tot de eenvoudigste grondslagen, van waaruit men omgekeerd weer tot de moeilijkere stellingen opklimt, het herhaalde ononderbroken in den geest doorloopen van iedere deductieve keten vanaf het uitgangspunt tot de verst verwijderde conclusies; aangeraden wordt het aandachtige bestudeeren van zeer eenvoudige zaken, het bij wijze van oefening zelfstandig terugvinden van vondsten van anderen, het toepassen van alle hulpmiddelen, die zintuigen, voorstelling en geheugen kunnen opleveren. Wanneer we niet wisten, dat het hier om een algemeene methode van wetenschappelijk onderzoek ging, zouden we telkens weer kunnen meenen, een geschrift over de didactiek der wiskunde te lezen.

In de thans volgende groep der *Regulae* wordt nader ingegaan op de algebraische behandeling van wetenschappelijke problemen; we vernemen hier, dat, zoodra het gestelde probleem goed is begrepen, zoodra geabstraheerd is van ieder overbodig begrip en de vraag in zooveel mogelijk onderdeelen is gesplitst, de voorkomende grootheden moeten worden voorgesteld in een ruimtelijke gedaante, bij voorkeur door een lijnstuk, en aangeduid door een algebraisch symbool, dat men dan, bekende en onbekende grootheden op denzelfden voet behandelend, betrekkingen moet afleiden, die hare wederzijdsche afhankelijkheid tot uitdrukking brengen en welker aantal voldoende is, om de onbekenden op te lossen.

Op dit punt breken de *Regulae* af, maar men zou nauwelijks een hiaat opmerken, wanneer men de *Géométrie* er onmiddellijk aan liet aansluiten, om daar in nog verder gaande specaliseering de methode te zien toepassen in de behandelingswijze van geometrische problemen, die de analytische meetkunde vormt.

Wat dus het *Discours* nog slechts met waarschijnlijkheid deed vermoeden, is in de *Regulae* zekerheid geworden: de Cartesiaansche methodiek is een poging, om wiskundige denkvormen en bewijsmethoden toepasbaar te maken op alle aardsche wetenschappen: axiomata opzoeken, deductief redeneeren, quantitatieve relaties opstellen en ze algebraisch behandelen, ziedaar de wezenlijke kern van het grandiose project, om, zooals de aanvankelijk ontworpen titel het uitdrukte, een universeele wetenschap te vormen, die onzen geest zal kunnen verheffen tot den hoogsten graad van volmaaktheid.

Deze mathematische instelling van den geest van Descartes verklaart veel èn van de deugden èn van de zwakheden van zijn denken. Ze verklaart den strengen bouw van zijn wereldomvattend systeem, de helderheid van zijn schrijfwijze en het dwingend-overtuigende, dat zijn redeneeringen vaak ook dan nog schijnen te bezitten, wanneer hij reeds op een dwaalweg verkeert; en ze verklaart ook zijn uiteindelijk falen in zoo menig probleem, dat zich nu eenmaal niet liet dwingen in den ideaal-mathematischen vorm. Het schijnt wel, dat de daemon der wiskunde zijn volgelingen altijd weer wil verleiden tot den waan, dat ze de helderheid van het spreken en de strengheid van het denken, waartoe het sterk abstracte of zuiver ideëele karakter van hun begrippen hen bij de beoefening van hun eigen wetenschap in staat stelt, ook zullen kunnen bereiken op andere gebieden, de natuur, het bewustzijn of de menschelijke samenleving betreffend, waar de oneindige complicatie van het object zich tegen de directe mathematische behandelingswijze verzet.

Descartes is aan die fout niet ontkomen en het is vooral de physica geweest, de wetenschap, waarin een geforceerd mathematische behandeling in het licht van de onweerlegbare ervaring haar ontoereikbaarheid snel pleegt te onthullen, die er de ernstigste gevolgen van heeft geopenbaard. Het kost inderdaad slechts geringe moeite, uit zijn werken een bloemlezing van uitspraken bijeen te brengen, die, aan het ideaal van de empirisch-inductieve methode getoetst, onvermijdelijk tot een volstrekte veroordeeling

van de Cartesiaansche beoefening der natuurkunde schijnen te moeten leiden. Men denke slechts aan zijn miskenning van Galilei's werk over de valbeweging, dat hij van geringe waarde acht, omdat de opgestelde wetten niet deductief zijn afgeleid uit het wezen van de zwaarte of aan zijn bewering, dat men, om tot de wetten van de lichtbreking te komen, weinig heeft aan de directe waarneming, omdat die wetten moeten voortvloeien uit de kennis van den aard van het licht, welke zelf weer volgt uit een intuitief inzicht in de werking der natuurkrachten. Lijkt het niet gerechtvaardigd, wanneer men hem verwijt, dat hij het paard van het natuuronderzoek achter den wagen spant, dat hij redeneert van het centrum naar de peripherie inplaats van in omgekeerde richting? En toch kan slechts een bepaalde eenzijdige opvatting van het wezen der empirische inductie hier tot de volstrekte veroordeeling voeren, die men over het werk van Descartes als physicus wel eens gaarne wil uitspreken. Het is de opvatting, die de begrippen en hypothesen, waardoor de beschrijving of de verklaring van de natuurverschijnselen mogelijk wordt gemaakt, als het ware door een mechanisch proces wil laten voortkomen uit de systematisch gerangschikte ervaring en die geheel de rol over het hoofd ziet, die de spontane phantasie van den natuuronderzoeker bij de toepassing van de inductieve methode speelt. Voor die toepassing toch levert de empirie ongetwijfeld het te bewerken materiaal, maar het is de oncontroleerbare scheppende phantasie, die in het klein voor iederen stap in de richting van het onbekende en in het groot voor iedere vruchtbare samenvatting van een veelheid van verschijnselen onder één gezichtspunt, de vonk van het inzicht doet overspringen. Maar is het nu verwonderlijk, dat juist groote wiskundigen, beoefenaren dus van een wetenschap, die onophoudelijk als geen andere een beroep op de phantasie moet doen, soms, ondanks al hun kettersche neigingen tot deductief redeneeren, een scherpen blik toonen voor het essentieele karakter van een natuurverschijnsel of voor de richting, waarin zich het onderzoek en de begrippenvorming moeten gaan begeven? Zij gaan dan inderdaad niet geduldig voortschrijdend van de peripherie naar het centrum, maar ze doen dien overgang in een sprong en ze treffen het juiste midden dan toch vaker dan volgens de nuchter- methodische opvatting van de inductieve methode begrijpelijk zou kunnen zijn.

En zoo, dunkt mij, is het ook met Descartes; ik wil nog in het

midden laten, dat men uit zijn werken met tal van voorbeelden kan bewijzen, dat zijn aandacht voor de empirie heelemaal niet zoo zwak was, als de geciteerde uitspraken zouden kunnen doen vermoeden; want zijn historische waarde voor de ontwikkeling der physica ligt niet in het werk, dat hij in onmiddellijke aansluiting aan de ervaring verrichtte; die waarde moet men zoeken op de plaatsen, waar hij over de natuur redeneert als een zuivere mathematicus en waar hij het onderneemt, uit enkele zeer algemeene, als evident aanvaarde grondbeginselen zijn cosmologische theorieën deductief af te leiden; en om haar te beseffen, moet men niet zoozeer letten op de juistheid van zijn bijzondere resultaten, op de botsingswetten of de vortex-theorie, maar op de algemeene trekken van het systeem, dat hij met een onvervaarde denkkracht tot in details uitwerkt. Van hem blijkt dan de eerste principieele formuleering afkomstig te zijn van een geometrisch-mechanisch wereldbeeld, een conceptie, die ondanks de begrensdheid van haar vermogen tot afbeelding van de natuur, toch van onschatbare waarde is geweest voor de ontwikkeling der physica; van hem is de gedachte, alle natuurgebeuren te zien als plaatsverandering en uitwisseling van een quantum, dat voor het heele systeem een onveranderlijke waarde behoudt, een denkbeeld, dat, hoe onhoudbaar het ook bleek te zijn in de practische uitwerking, die hij er zelf aan gaf, in de latere energetische beschouwingswijze van de natuur zijn vruchtbaarheid heeft bewezen. En hij is het ten slotte geweest, die, een door Galilei reeds aangewezen gedachtengang voortzettend, het grootsche programma van een algebraische behandeling der natuurwetenschap heeft opgesteld, dat in de mathematische physica haar verwezenlijking zou vinden. En vooral deze daad verschaft hem, die in de eerste plaats wiskundige en philosoof was, ook een plaats onder de groote figuren van de geschiedenis der natuurwetenschap. De algebra zou eerst moeten worden aangevuld door de infinitesimaalrekening, voordat de Cartesiaansche methode haar consequente toepassing op natuurwetenschappelijke problemen kon vinden. Toen bleek echter, hoe juist de divinatie van het bestaan eener universeele mathesis, die de meest uiteenloopende onderwerpen onder abstractie van elks bijzonderen aard in denzelfden symbolischen vorm en met dezelfde methoden kon behandelen, was geweest.

En deze overweging werpt ten slotte nog een nieuw licht op de historische beteekenis van de ontdekking der analytische meetkunde.

In de zuivere wiskunde beduidt zij de definitieve opstelling van een algemeene methode, die, na eeuwen van voorbereiding, nog den vormenden greep van een mathematisch genie behoefde, om tot volkomen helderheid te kunnen komen; in de natuurwetenschappen opent zij als eerste toepassing van algebraische beschouwingswijzen op ruimtelijke problemen, de eeuwen van triomf, die de analytische methode in de physica zou beleven.

MEETKUNDE VOOR M. U. L. O.

DOOR

J. H. SCHOGT.

Welke eischen men moet stellen aan het meetkunde-onderwijs op m.u.l.o.-scholen, kan ik niet precies beoordeelen, maar zooveel is zeker, dat men van elk meetkunde-onderwijs, aan welk type van scholen ook gegeven, mag verlangen, dat wat onderwezen wordt, juist is, althans wat de hoofdzaken betreft, en dat de leerboeken in behoorlijken stijl zijn geschreven, opdat niet het onderwijs in het eene vak (wiskunde) zal vernietigen, wat het onderricht in het andere (Nederlandsch) moeizaam heeft opgebouwd.

Voor mij liggen drie onlangs verschenen meetkunde-boekjes voor m.u.l.o.-scholen; de gemeenschappelijke eigenaardigheden daarvan hebben mij tot het schrijven van dit artikel gebracht.

Ik kan mij best voorstellen, dat men verkeerd zou doen, door bij het m.u.l.o. eenige eischen te stellen aan axiomatischen opbouw, dat het te veel gevergd zou zijn, als men er een dragelijke theorie der onmeetbare verhoudingen zou verlangen, en dat de onderwijzer zich vaak gedwongen ziet, de overigens zoo belangrijke besprekingen bij meetkundige werkstukken achterwege te laten. En ik kan er geheel mee instemmen, dat wat niet grondig behandeld kan worden, wordt weggelaten. Maar ik zie niet in, dat de schrijvers van meetkundeboeken voor m.u.l.o. stelselmatig alles moeten negeeren, wat aan het onderwijs in meetkunde op h. b. s. en gymnasium in de laatste jaren is verbeterd. En het heeft er allen schijn van, dat de schrijvers dit inderdaad doen, hetzij uit onbekendheid met bedoelde verbeteringen, hetzij opzettelijk.

Zondert men enkele verouderde, maar nog hier en daar in gebruik zijnde leerboeken bestemd voor het middelbaar onderwijs uit, alsook een paar werken, die reeds bij hun verschijning verouderd moesten heeten, dan kan men wel zeggen, dat thans de onderscheiding van wat vroeger „lijn" genoemd werd, in lijnen, halve

lijnen en lijnstukken, algemeen in gebruik is gekomen in de voor h. b. s. en gymnasium bestemde werken. In geen van mijn drie m.u.l.o.-boeken heb ik er iets van aangetroffen. Daarentegen geven alle drie de ouderwetsche behandeling der gelijkvormigheid, zonder vermenigvuldiging van figuren, een behandelingswijze, die bij het middelbaar onderwijs vrijwel heeft afgedaan. Ook trof mij in twee van de drie het foutieve gebruik van het woord „willekeurig". Willekeurig is een driehoek, als slechts gegeven is, dat de figuur een driehoek is, maar men dien driehoek naar willekeur kan kiezen. Een mijner boeken zegt echter, dat een driehoek willekeurig of ongelijkzijdig heet, als de hoeken scherp en geen twee zijden gelijk zijn. Een ander geeft deze bepaling: „Is een vierhoek geen parallelogram en ook geen trapezium, dan noemen we hem willekeurig". En wat de keuze der onderwerpen betreft, men vraagt zich met verwondering af, wat de schrijver van een mijner boekjes denkt te bereiken met het opnemen van een detailquaestie als de regelmatige vijftienhoek, wat de auteur van een der andere ertoe gebracht heeft, den voetpuntendriehoek en het antiparallelisme in de theorie op te nemen (bij welk laatste onderwerp de bekende grove fout niet wordt vermeden, dat vergeten wordt mede te deelen, dat antiparallelisme slechts beteekenis heeft ten opzichte van twee snijdende of evenwijdige lijnen).

Bijzonder onaangenaam treft den lezer van twee der boeken (voor het derde geldt dit in veel mindere mate) de buitengewone slordigheid van stijl. Het lijkt wel of de schrijvers de kladjes, waarop zij hun werk ontworpen hebben, als kopij naar de drukkerij hebben gezonden. Daardoor verkrijgt de tekst een onaangenaam, rebus-achtig uiterlijk. Waar daartoe maar eenigszins gelegenheid is, worden woorden, of zelfs deelen van woorden, door teekens vervangen, en is dit onmogelijk, dan trachten de schrijvers ten minste te ontkomen aan de noodzakelijkheid, de woorden *voluit* te schrijven. Zoo worden verwisselende binnenhoeken bij een der schrijvers tot verw. binnen ∠∠, bij een anderen zelfs tot verw. bi. ∠∠. Een stelling luidt: Als (in verband met wat er boven staat vervangen door een aanhalingsteeken) 2 bi. ∠∠ a.d.k.d.s samen 180° zijn, loopen de lijnen evenw. Een vraagstuk wordt als volgt geformuleerd: Als twee buiten ∠∠ van een △ samen 270° zijn, dan is die △ rechth. Bewijs! Een ander aldus: In een gelijkb. △ is de buiten ∠ van den tophoek 136°. Hoe groot zijn de buiten ∠∠

der basis ∠∠? Slordigheid is iets, waarin men geen consequentie kan verwachten, vandaar dat men zich niet moet verwonderen, dat er tophoek staat. niet top∠, toph., t.hoek, t.h., t∠, of iets dergelijks. En kan men het een klas schooljongens kwalijk nemen, als zij de stelling: In een rechthoekigen driehoek is 't product der rechthoekszijden = de hoogtelijn op de hyp. × de hyp." aanvullen met hoera!?

Wie zijn leerlingen wil opvoeden tot nauwkeurig, zorgvuldig werken, moet niet beginnen met den indruk te vestigen, dat hij zich zelf den tijd niet gunt, een zin of zelfs een woord voluit te schrijven. Hij moet er niet tegen opzien, van zijn leerlingen te eischen, dat zij de stellingen, waarop hun gevolgtrekkingen gebaseerd zijn, volledig en voluit vermelden, en hij moet natuurlijk zelf in gesproken woord en geschreven boek het goede voorbeeld geven.

DE CYCLOMETRISCHE VORMEN

DOOR

P. WIJDENES.

Steeds zal er verschil van meening blijven bestaan tusschen hen, die gaarne hun leerlingen optrekken en anderen, die dit bij voorbaat onmogelijk achten. De breede middenstof wil gaarne met de eerste groep mee, naar 't mij voorkomt en als een gelegenheid wordt geboden zonder verzwaring der leerstof deze beter te geven, dan is hun dat welkom; ze staan niet afwijzend tegen het nieuwe of tegen de nieuwe vorm.

Er zijn onderwerpen, die in hun geheele omvang te moeilijk zijn en dat zijn de cyclometrische vormen zeker; men sla b.v. maar de vierde druk van mijn Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie op om direct in te zien, dat die stof, aldus behandeld, voor de leerlingen te zwaar is. Kon men deze niet wat anders geven, dan deed men beter het onderwerp gansch niet aan te roeren. En toch is het noodig althans de begrippen goed aan te brengen; in voortgezette studie komen de vormen bg sin a, bg cos b, bg tg c zoo dikwijls voor, vooral de laatste twee, dat het gewenscht mag heeten althans er een les of vier aan te wijten. Vooral ook, omdat de stof, nauwkeurig behandeld, eenig denkwerk geeft, veel meer dan de „merkwaardige lijnen" en de vragen, waarbij uit allerlei rare vormen moet worden bewezen, dat een driehoek gelijkbeenig of rechthoekig is, vragen die op hetzelfde standpunt staan als de Vlakke Meetkunde, waarbij men 60 keer vraagt te bewijzen, dat twee driehoeken congruent zijn en 40 hiervan omzet in gelijkvormigheid, waar de congruentie van veelhoeken, de behandeling van ongelijkslachtige vormen nog als meetkunde worden aangezien, terwijl het veel weg heeft van kindermishandeling. — Nu dwaal ik af.

De cyclometrische vormen kunnen wetenschappelijk streng, logisch sluitend, worden behandeld; zie daarvoor het genoemde boek. Men definieert bg sin p, $|p| \leqq 1$; bg cos p, $|p| \leqq 1$; bg tg p

PROSPECTUS

BEKNOPTE MEETKUNDE

DOOR

P. WIJDENES
AMSTERDAM

EERSTE DEEL

ZEVENDE DRUK

TWEEDE DEEL

ZESDE ZORGVULDIG NAGEZIENE DRUK

Met het oog op invoering zijn present-ex. bij den uitgever of den schrijver verkrijgbaar

P. NOORDHOFF N.V. — 1932 — GRONINGEN

INHOUD VAN DEEL I.

INHOUD VAN DEEL II.

BIJ DE BEKNOPTE MEETKUNDE.

Op de scholen met een beperkt wiskunde-program, dus op die, **waar het onderwijs tevens eindonderwijs is,** wordt de meetkunde vooral onderwezen om de vormende waarde, om het denkvermogen van de leerlingen te scherpen, om hun hersenen te wetten. Dat is het hoofddoel van het geheele schoolonderwijs in de Wiskunde: voor de school toch is Wiskunde een geheel van stellingen met de daarop rustende bewerkingen, die gerangschikt zijn in logische orde, zoodat steeds het nieuwe rust op het bekende en als gevolg daarvan onomstootelijk kan worden vastgesteld. Met dit doel voor oogen is geen enkel vak van het lager en middelbaar onderwijs daartoe zoo bij uitstek geschikt als de meetkunde . . . . men drijve dit echter niet al te zeer op de spits; de groote grief tegen ons elementair meetkunde-onderwijs, nl. **dat het absoluut bezijden het leven staat,** is maar al te juist; een leerling van de H. B. S. 3 j. c. en van de M.U.L.O.-school, die slechts de gewone vlakke meetkunde heeft geslikt, weet weinig of niets van wat hem in het leven te pas komt, nl. van de noodige inhouds- en oppervlakte-berekeningen. Ik heb daarom gebroken met wat tot heden als de normale stof gold en heb de inhoud uitgebreid met de berekeningen van oppervlakten en inhouden; het is veel nuttiger, dat hij de inhoud van een bergruimte, van een terreinverhooging, van een uitgraving, van een emmer kan uitrekenen, dan dat hij kan bewijzen: „Als men uit het snijpunt der diagonalen van een koordenvierhoek loodlijnen op de zijden neerlaat, dan zijn de voetpunten de hoekpunten van een raaklijnenvierhoek", om er maar eens een te nemen. Het is beter, dat hij weet, hoeveel m^2 plaatijzer er gaat aan een ronde reclamezuil, afgedekt door een kegel, dat hij kan opgeven, hoeveel m^2 verf- of stucadoorwerk ergens aan zit, dan dat hij de „verdubbelformule" kan afleiden.

„Dus nog uitgebreid de gewone leerstof?" Neen, volstrekt niet; **veel wat onnut was, heb ik weggelaten;** waarom in alle bijzondere, opzettelijk ineengedraaide gevallen te bewijzen,

dat twee driehoeken congruent of gelijkvormig zijn? Waarom constructies als $x = \sqrt[4]{abcd}$, waarom verdubbel-, halveer- en andere formules, waarom de s-formules voor de deellijnen, waarom ontzettend veel onpractisch sleurgoed en . . . . . nog veel sterker, waarom de volgorde zóó, dat het onderwijs telkens hokt en zóó, dat een zelfde zaak twee keer voorkomt?

„Wat bedoelt U met dat laatste?" vraagt de lezer. — 'k Zal het U zeggen:

't Hokt [1]) bij de congruentie van driehoeken, als men die *reeds bij eerste oefening* uitbreidt tot: „basis, verschil der basishoeken en som der opstaande zijden"; dit slag heb ik veel verderop pas genomen bij de constructies. **Men loopt vast** 2) in de 2e klas bij de behandeling van de evenredigheid van lijnstukken en de gelijkvormigheid, 't zij deze op de verouderde, 't zij op de juiste manier behandeld wordt. [1]) Geen wonder: de onderlinge vergelijking van twee figuren (de eenvoudige congruentie van driehoeken uitgesloten) is veel lastiger dan de beschouwing van één figuur, b.v. wat betreft de oppervlakte . . . . die pas in de 3e klas komt, of de hoeken in een cirkel, die ook pas in de 3e komen. Dan, **'t loopt spaak:** 3) in het laatst van de 2e klas met de berekening van lijnstukken in driehoeken, bij U als bij mij, vroeger, thans, en als we niet omzetten, ook in 't vervolg . . . . Waar wij er zijn om de leerlingen, acht ik het gewenscht hun deze stof niet in de 2e klas toe te dienen, maar in de 3e, waar men door de meerdere vaardigheid in de algebra, met name in de wortelvormen, betere resultaten krijgt. — Ook zei ik: **omdat een zelfde zaak tweemaal voorkomt:** ik bedoel daarmee de stellingen van de rechthoekige driehoek en de evenredigheid van lijnstukken in de cirkel; ook de theorie der gelijkvormigheid bij rechtlijnige figuren en bij de cirkel; dit begrip later en dan in zijn geheel ontwikkelen, is veel beter. —

Verder heb ik gepoogd om veel dingen eenvoudiger te behandelen; zoo heb ik de traditioneele vijf congruentie-gevallen door samenvoeging van de eerste twee tot *vier* teruggebracht; het eerste luidt dan: „Twee driehoeken zijn congruent, als ze gelijk hebben één zijde en twee hoeken." Korter en beter

[1]) De juiste manier is in 1927 ook toegelaten verklaard voor het „M.U.L.O."

dan de beide gevallen, waartusschen geen wezenlijk onderscheid bestaat en waarbij dan bovendien volkomen overeenkomst is met de *vier* gevallen van gelijkvormigheid.

Met dat al moet ik er op wijzen, dat dit boek dezelfde moderne geest ademt, als mijn grootere leerboek en die meer zijn voor hen, die langer en degelijker de Meetkunde beoefenen. Met name geldt dit voor de behandeling van de cirkel, de meetkundige plaatsen en de gelijkvormigheid; de bestudeering van dit werk is door de **betere rangschikking van de stof en de groote vereenvoudiging** van enkele zaken (zie de oppervlakten, inhouden, de regelmatige veelhoeken, de opp. van de cirkel, enz.) veel meer vruchtdragend dan van andere werken; **overal heb ik er voor gezorgd, dat de leerling niet optornt tegen de stof, omdat die voor zijn ontwikkeling te vroeg valt.**

Evenals voor Algebra en Rekenen hebben de leeraren aan de H. B. S. met 3 j. c. te Amsterdam ook een normaalprogram ontworpen voor de Meetkunde, zooals U in de 1e kolom hieronder ziet; in de 2e staat de inhoud van dit werkje.

	1e deel.
1e klas. Vlakke meetkunde tot en met de bijzondere vierhoeken. Eenvoudige constructies.	Grondbegrippen. Hoeken. Evenwijdige rechten. Driehoeken. Congruentie van driehoeken. Eerste werkstukken. Veelhoeken. Bijzondere vierhoeken. (Congruentie van veelhoeken)
2e klas. Eenvoudigste eigenschappen van de cirkel. Oppervlakte van rechtlijnige figuren.	De cirkel. Werkstukken. Oppervlakte. Stelling van Pythagoras met gevolgen. Oppervlakte en inhoud van lichamen. Herhaling.

Evenredigheid van lijnstukken; gelijkvormigheid.

3e klas. Voortzetting.
In- en omgeschreven veelhoeken.
Opp. en omtrek van de cirkel.

2e deel.

Meetkundige plaatsen.
Meten van hoeken door cirkelbogen.
Evenredigheid van lijnstukken.
Vermenigvuldiging van figuren; gelijkvormigheid.
Toep. van de gelijkvormigheid der driehoeken.
Berekening van lijnstukken in een driehoek.
Cirkels bij drie- en vierhoeken
Regelmatige veelhoeken.
Omtrek en opp. van de cirkel.
Cylinder, kegel en bol.

Zooals alle programma's is het zeer sober, opzettelijk om de leeraren de noodige vrijheid van beweging te laten; ik voeg in dit boek er nog aan toe oppervlakte en inhoud van prisma, pyramide, cylinder, kegel en bol om de zoo even gegeven redenen.

Deel I is nagenoeg een afgerond geheel; als de leeraar er nog de cirkel en de gebogen oppervlakten bij behandelt in het kort, dan heeft de leerling een behoorlijke hoeveelheid meetkundige kennis van practische bruikbaarheid opgedaan.

De inhoud vindt men heel eenvoudig op de beide blaadjes met de kleine figuurtjes hierbij; begonnen met de M.U.L.O.-boekjes, voortgezet bij het grootere leerboek, is het me een niet genoeg te waardeeren hulpmiddel bij het onderwijs gebleken en daarom heb ik mijn uiterste best gedaan om dit overzicht zoo duidelijk mogelijk te doen zijn.

Met dit hulpmiddel krijgt de meetkunde voor de scholieren vastheid en grond. Leeraren, die meenen, dat de jongens vanzelf de zaken onder de knie krijgen door „veelvuldig gebruik", hebben het geheel mis; daarvoor is de tijd te kort, het inzicht nog te gebrekkig en het aantal vakken te groot.

Het werk, zooals het hier ligt, is geschikt voor H. B. S. met

3 j. c., voor M. U. L. O.-scholen, Zeevaart- en Kweekscholen, voor Meisjesscholen, Technische scholen, enz.

Over de grootste soort daaronder, de M. U. L. O.-scholen en het officieele program, gaarne een enkel woord.

Diploma A.	Diploma B.
1. Eigenschappen en congruentie van veelhoeken. Eigenschappen van veelhoeken.	1—5 als A en bovendien
2. Evenredigheid van lijnen. Gelijkvormigheid van driehoeken.	6. Eigenschappen van den cirkel.
3. Enkele merkwaardige lijnen in de driehoek.	7. Om-in- en aangeschreven cirkels van den driehoek
4. Oppervlakken.	8. Vierhoeken, in en om den cirkel.
5. Zeer eenvoudige vraagst.	9. Regelmatige veelhoeken.
	10. Opp. en omtrek van den cirkel.

Zooals in het vorige betoogd is, is de volgorde minder goed; 2, 3 en 4 moeten zijn 4, 2 en 3, tenminste, als men vasthoudt aan de eerste methodische eisch van opklimmende moeilijkheid!

De cirkel is bij A niet genoemd! Dat is geheel verkeerd. Het is toch ondenkbaar, dat een onderwijzer met behoorlijk inzicht in de leerstof oppervlakte en omtrek van de cirkel ter zijde laat om zijn leerlingen vooral te splitsen op de binnen- en buitenbissectrices! (zie punt 3).

Aldus schreef ik reeds van de eerste druk van dit boekje af en ik heb gelijk gekregen; het inzicht is gekomen eerst bij de Vereeniging voor Chr. M.U.L.O. in 1928 en daarna op de Algemeene Vergadering van de Vg. voor M.U.L.O., gehouden te Leeuwarden 28 December 1929, waar het volgende voorstel van het Hoofdbestuur (verdedigd door den Heer Hofland) werd aangenomen:

We houden het tegenwoordige programma, dat uitgebreid wordt met de eenvoudigste eigenschappen van de cirkel, waaronder te verstaan: *het meten van hoeken door cirkelbogen, evenredigheid van lijnen in de cirkel, eenvoudigste constructies, die daarmee verband houden.*

Van de beide deeltjes van deze

BEKNOPTE MEETKUNDE

heeft men voor het **M.U.L.O.-diploma A** noodig *Deel I geheel* (blz. 56—59 overslaan); met inbegrip van oppervlakte en inhoud van lichamen dus 92 bladzijden; de herhaling achterin dient als altijd als vindplaats van proefwerksommen.

Van Deel II zijn noodig blz. 10—66 en blz. 82—105.

Alzoo met inbegrip van oppervlakte- en inhoudberekening in het geheel 92 + 57 + 24 bladzijden; hieronder zijn dan begrepen 139 + 119 figuren en de vraagstukken. Het geheel geeft dus geen overmatige hoeveelheid stof *en de beide boekjes zijn juist van pas voor scholen met een beperkt programma.*

Voor het **M.U.L.O.-diploma B** heeft men beide deeltjes noodig; mij dunkt, de eenvoudige theorie over de meetkundige plaatsen moet men in een paar lessen ook maar behandelen.

☛ **De oplossingen en antwoorden** zijn voor gebruikers van de Beknopte Meetkunde gratis te bekomen bij den schrijver (Amsterdam Zuid, Jac. Obrechtstraat 88) of bij den uitgever.

PROSPECTUS

BOEKHOUDEN

DOOR

A. A. D. BOUWHOF, J. C. LAGERWERFF
EN J. H. A. KREDIET

DEEL IV



PRIJS VAN HET COMPLETE BOEK,
GROOT 348 PAG., f 3.25, GEB. f 3.75

P. NOORDHOFF N.V. — 1932 — GRONINGEN, BATAVIA

VOORBERICHT.

Dit deel bevat, met hetgeen behandeld wordt in het hierop volgende vijfde deel, en in aansluiting op hetgeen reeds gegeven werd in de 3 voorafgaande deelen van dit werk, de volledige leerstof, vereischt voor de verschillende practijk-diploma's boekhouden.

Ook studeerenden voor de acte Handelskennis L. O., voor het Staatspractijk diploma, of voor de acte M. O. Boekhouden kunnen in dit deel veel aantreffen, wat voor hun studie van belang is.

Door het geven van vele uitgewerkte voorbeelden, welke de studeerenden zullen moeten nawerken, hebben wij getracht de studie te vergemakkelijken.

Zooveel mogelijk hebben wij bij de behandeling der leerstof het gebruik der dagboeken naar voren gebracht, terwijl ook aan het afsluiten van boeken en rekeningen veel aandacht is besteed.

Opbouwende critiek zullen wij gaarne ontvangen.

Den Haag / Utrecht, September 1932.

DE SCHRIJVERS.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

Journaal-grootboek.

De **„Journaal-grootboek methode"** is die vorm van Dubbel Boekhouden, waarin journaal en grootboek tot één enkel boek zijn samengevoegd en dientengevolge tegelijkertijd worden bijgewerkt.

Bovendien wordt besparing van arbeid verkregen, doordat alle omschrijving op de grootboekrekeningen achterwege blijft.

Bij de samenvoeging van journaal en grootboek kan men als volgt te werk gaan.

Aan het journaal worden een aantal dubbele kolommen toegevoegd voor de grootboekrekeningen, waarvan de naam aan het hoofd wordt vermeld. Deze dubbele kolommen vormen te zamen het grootboek.

In de linkerhelft der dubbele kolommen worden de *debet*bedragen der rekeningen opgenomen; de rechterhelft is bestemd voor de bedragen, die in het *credit* der grootboekrekeningen moeten worden vermeld.

Zulk een journaal-grootboek (waarbij slechts enkele grootboekrekeningen zijn aangegeven) kan er bv. als volgt uitzien:

Journaal-grootboek.

Datum	Omschrijving	Bedrag		Kas		Debiteuren		Goederen		enz.
		Debet	Credit	Debet	Credit	Debet	Credit	Debet	Credit	
1	2	3	4							

In het gegeven model komen de grootboekrekeningen *naast* elkaar voor; de daarop te boeken bedragen worden *onder elkander* opgenomen en hun som bepaald, door *verticaal* op te tellen.

en bg cotg p; voor de eerste geldt het interval $-\frac{1}{2}\pi$ tot $\frac{1}{2}\pi$, voor de tweede 0 tot π, voor de derde $-\frac{1}{2}\pi$ tot $\frac{1}{2}\pi$ en voor de vierde 0 tot π. Men heeft nu algemeen geldige formules en half-algemeen geldige formules (deze gelden alleen in het gemeenschappelijke vak 0 tot $\frac{1}{2}\pi$). Verder wordt zoowel in de gegevens als in de uitkomsten in alle formules vastgehouden aan de definities; men krijgt dan bij de som- en verschilformules en in de formules, die er uit worden afgeleid door twee argumenten gelijk te stellen (bv. 2 bg cos b) toevoegingen van $\frac{1}{2}\pi$ of $-\frac{1}{2}\pi$. Alles is zuiver opgebouwd, maar...... voor de school ten eenen male ongeschikt; als er 1 op de 5 in een hoogste klas die leerstof kan verwerken, dan is het al mooi; maar die kan het wel zonder leeraar; zulke leerlingen zijn er gelukkig ook altijd nog.

Nu kan men voor de school een ander standpunt innemen. Ten eerste wordt gedefinieerd, dat bg sin p voor positieve p ($p \leqq 1$ laat ik verder maar weg) een hoek in het eerste kwadraat beteekent en bg sin $-p = -$ bg sin p, zoodat het eerste lid een negatieve hoek voorstelt (zeg niet: in het vierde kwadrant ligt; we gaan van OX_+ naar beneden en maken niet de zwaai over OY_+, OX_- en OY_-). Bg cos q is voor positieve q een hoek in het eerste kwadrant en voor negatieve een in het tweede; dus bg cos $-q = 180°$ $-$bg cos q.

Bg tg r, voor positieve r, beteekent weer een hoek in het eerste kwadrant en bg tg $-r = -$ bg tg r. De andere cyclometrische vormen worden geheel verzwegen, als volslagen overbodig; iets wat nooit, noch in verdere studie, noch in de practijk, voorkomt, kan gerust achterwege blijven; er zijn al genoeg wilde loten aan onze schoolwiskunde, waar het snoeimes in gezet moet worden, dat het niet noodig is, er een bij te laten groeien.

Als oefening kan men nu eenige herleidingen uitvoeren, minder om deze, maar om de leerlingen de begrippen goed in te prenten, dus b.v. bg tg $\frac{3}{4}$ = bg cos $\frac{4}{5}$ = bg sin $\frac{3}{5}$;
bg cos $-\frac{5}{13} = 180° -$ bg cos $\frac{5}{13} = 180° -$ bg tg $2\frac{2}{5}$.

Het aantal van deze oefeningen behoeft slechts gering te zijn; het is immers niet anders dan een herhaling van wat ze in de eerste lessen in de goniometrie reeds leerden.

Eenige moeilijkheid treedt pas op, als men gaat optellen en aftrekken; opzettelijk geven we getallen-voorbeelden.

1 bg sin $\frac{3}{5}$ + bg sin $\frac{5}{13}$ = bg sin x (uit een schoolboek).

Noem de eerste boog α, de tweede β; men vindt sin $(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$; in de vergelijking

$$\text{bg sin } \tfrac{3}{5} + \text{bg sin } \tfrac{5}{13} = \text{bg sin } x \text{ vindt men dus } \tfrac{56}{65}.$$

Nu hebben we twee jaar lang steeds geleerd, dat *een hoek door zijn sinus niet bepaald is,* dat geen enkele van de goniometrische verhoudingen alleen een hoek bepaalt.

Wie nu na te hebben berekend, dat $x = \frac{56}{65}$ is, verder zwijgt en geen poging doet om te ontdekken, of met bg sin $\frac{56}{65}$ de hoek in het eerste of in het tweede kwadrant wordt bedoeld, die doet zijn leerlingen schromelijk te kort.

Van de leerlingen wordt dan geëischt, dat zij met vaagheid en halfheid tevreden moeten zijn, in plaats, dat men hun de oogen opent; de ontluikende jeugd heeft er recht op, dat hun critische geest wordt ontwikkeld, in plaats van onderdrukt. Want zie, doe hetzelfde met bg sin $\frac{4}{5}$ + bg sin $\frac{12}{13}$ = bg sin x en men krijgt ook $x = \frac{56}{65}$. Natuurlijk komt een leerling daar niet op, als men er hem niet op wijst. Maar is het niet een dwingende plicht van een leeraar en zeker van een schrijver, dit juist wel te doen? Beter dan de cyclometrische vormen op bovenstaande manier te behandelen is het om er in het geheel niet van te reppen.

Om de lezers nog eens te overtuigen, dat de zaak ernstig genoeg is om onder de oogen te zien: *een getal x te vinden, zoodat* bg sin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ + bg sin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ = bg sin x.

Men vindt natuurlijk met de som-formule, dat het eerste lid tot sinus heeft (op de manier dus, als bg sin $\frac{3}{5}$ + bg sin $\frac{5}{13}$ berekend is) $x = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dat zou zelfs de slechtste van de klas te kras zijn: bg sin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ + bg sin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ = bg sin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$! Daar *moet* toch zeker wat op volgen; en toch doe ik niet anders dan in het eerste voorbeeld, nl. wat uitrekenen en daarmee basta.

Hoe ons nu uit de moeilijkheid te redden en zoo, dat de zaak klaar voor de jongens blijkt? Antwoord: *voor de school wordt* **geen** *formule afgeleid voor de som bg sin p + bg sin q,* noch in letters, noch in getallen; de reden wordt er bij gezegd: omdat een tweede lid bg sin $(p\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{1-p^2})$ geen uitsluitsel geeft, welke hoek er bedoeld wordt, de scherpe of de stompe. Nu redden we ons heel eenvoudig als volgt: in het eerste lid (p en q positief en met de bekende beperking) staat de som van twee scherpe hoeken; als men dus de cosinus van die som uitrekent, dan zal het

feit, dat deze positief uitvalt, aangeven, dat de som een scherpe hoek is en als het tweede lid negatief is, dat men een stompe hoek krijgt. *We gaan dus direct over op cosinussen.*

Het eerste voorbeeld: bg sin $\frac{3}{5}$ + bg sin $\frac{5}{13}$ =
bg cos $\frac{4}{5}$ + bg cos $\frac{12}{13}$ = bg cos $(\frac{4}{5} . \frac{12}{13} - \frac{3}{5} . \frac{5}{13})$ = bg cos $\frac{33}{65}$.

Het tweede: bg sin $\frac{4}{5}$ + bg sin $\frac{12}{13}$ =
bg cos $\frac{3}{5}$ + bg cos $\frac{5}{13}$ = bg cos $(\frac{3}{5} . \frac{5}{13} - \frac{4}{5} . \frac{12}{13})$ = bg cos $-\frac{33}{65}$ =
180° — bg cos $\frac{33}{65}$.

Het derde: bg sin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ + bg sin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ =
bg cos $\frac{1}{2}$ + bg cos $\frac{1}{2}$ = bg cos $(\frac{1}{2} . \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} . \frac{1}{2}\sqrt{3})$ =
bg cos $(-\frac{1}{2})$ = 180° — bg cos $\frac{1}{2}$. Zie, nu komt er behoorlijk uit, dat 60° + 60° = 120° is.

Voor de school dunkt het mij gewenscht, met de „sinustafel" (de tafel, waarin de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus, tangens en cotangens om de minuut zijn opgenomen) ook de andere voorbeelden te toetsen op hun juistheid; dat laat ik hier natuurlijk na. Wij geven deze ééne somformule:

$$\textbf{bg cos p + bg cos q = bg cos } (pq - \sqrt{1-p^2} . \sqrt{1-q^2}).$$

die geen enkele leerling moeilijk kan vinden; er staat immers niets anders dan cos $(\alpha + \beta)$ = cos α cos β — sin α sin β, alleen in een andere vorm.

Wel kan men bg sin p — bg sin q in een eenwaardige formule met een bg sin geven; valt immers $p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2}$ positief uit, dan is het eerste lid een scherpe hoek, maar is dit verschil negatief, dan is het verschil een negatieve hoek.

Een tweede formule is dus

$$\textbf{bg sin p - bg sin q = bg sin } (p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2}),$$

een omzetting van sin $(\alpha - \beta)$ = sin α cos β — cos α sin β.

Als men twee bogen, gegeven door hun cosinus moet aftrekken, dan heeft men, als men het verschil zou willen uitdrukken met een bg cos weer een twijfelachtig geval; laat het tweede lid zijn bg cos $\frac{9}{10}$; wat zegt ons dan, of hiermee de scherpe positieve of de scherpe negatieve hoek wordt bedoeld? Zoo zou zijn:

bg cos $\frac{4}{5}$ — bg cos $\frac{5}{13}$ = bg cos $(\frac{4}{5} . \frac{5}{13} + \frac{3}{5} . \frac{12}{13})$ = bg cos $\frac{56}{65}$ en
bg cos $\frac{3}{5}$ — bg cos $\frac{12}{13}$ = bg cos $(\frac{3}{5} . \frac{12}{13} + \frac{4}{5} . \frac{5}{13})$ = bg cos $\frac{56}{65}$.

Nu is het hier met het oog op het eerste lid niet twijfelachtig, dat in het eerste geval de positieve, maar dat in het tweede geval

de negatieve hoek moet worden genomen, die dezelfde cosinus heeft. Bij de optelling van bogen, gegeven door hun sinus, kan men soms ook wel keuze maken, als nl. getallen gegeven zijn; maar de zaak wordt bedenkelijk, als de argumenten van cyclometrische vormen in letters gegeven zijn.

We behoeven er niet verder op in te gaan, *want we geven geen formule voor bg cos p — bg cos q,* wegens de tweewaardigheid van het tweede lid. Het is ook zoo eenvoudig dit geval te omzeilen, nl.: *ga over op de sinus.* De beide gevallen hierboven genoemd worden dan

$$\text{bg cos } \tfrac{4}{5} - \text{bg cos } \tfrac{5}{13} = \text{bg sin } \tfrac{3}{5} - \text{bg sin } \tfrac{12}{13} =$$
$$\text{bg sin } (\tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{12}{13} - \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{5}{13}) = \text{bg sin } \tfrac{16}{65}.$$
$$\text{bg cos } \tfrac{3}{5} - \text{bg cos } \tfrac{12}{13} = \text{bg sin } \tfrac{4}{5} - \text{bg cos } \tfrac{5}{13} =$$
$$\text{bg sin } (\tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{5}{13} \cdot - \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{12}{13}) = \text{bg sin } - \tfrac{16}{65}.$$

Zoo men wil, kan men de uitkomsten weer omzetten in een bg cos.

Hoe staat het nu met de som en het verschil van twee scherpe hoeken, die door hun tangens gegeven zijn? Eenvoudig genoeg; zoowel de som als het verschil worden door de grootte en het teeken van het tweede lid bepaald;

$$\textbf{bg tg p + bg tg q = bg tg } \frac{\mathbf{p + q}}{\mathbf{1 - pq}}$$

$$\textbf{bg tg p − bg tg q = bg tg } \frac{\mathbf{p - q}}{\mathbf{1 + pq}}$$

Het is onnoodig hiervan voorbeelden te geven.

Is de eerste uitkomst negatief, dan ligt de som in het tweede kwadrant, is de tweede negatief, dan is het verschil een negatieve hoek, natuurlijk met een volstrekte waarde kleiner dan 90°.

Is dit wetenschappelijk in orde? Streng, formalistisch? Dat is: komen we niet in tegenspraak met de gegeven bepalingen? Inderdaad, volgens het groote Leerboek zeker en daar vindt men de eerste van deze formules ook niet, de tweede wel. Daar de formalistische opzet en de formules, als gevolg daarvan, slecht te verduwen zijn voor de leerlingen, zelfs van een 6de klas B van het Gymnasium en ze ook niet noodig zijn, heb ik voor dit geval er dit op gevonden: de definities zullen gelden *voor de gegevens* van een vraagstuk; ze gelden ook voor de uitkomsten, die uit twee termen ontstaan, op één na! Het feit nl., dat men, als de tangens van de som van twee

scherpe hoeken negatief uitvalt, voor deze som de stompe hoek moet nemen. Deze vrijheid heb ik mij op paedagogische gronden veroorloofd. Mij dunkt, dat mag wel; de rompslomp, die men heeft, als men het formalisme tot eenig richtsnoer neemt en het zeldzame gemak, dat men heeft met zoo'n kleine afwijking, die zoo voor het grijpen ligt, gaf mij daartoe het recht. Bovendien, en dit is ook van het grootste gewicht: de formules zijn zoo neer te schrijven; immers in bgtg $p +$ bgtg $q =$ bgtg $\frac{p+q}{1-pq}$ ziet de leerling tg $(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$, waarmee hij al zoo lang vertrouwd is. Wilde men streng volgens de regelen der kunst te werk gaan (zie het Leerboek), dan zou men hebben bg tg $p +$ bg tg $q =$ bgtg $\frac{pq-1}{p+q} + \frac{1}{2}\pi$, een formule, die we zeker niet doorzichtig kunnen noemen.

Nu geven we in het kort weer, wat bereikbaar zal blijken en wat leeraren en leerlingen, in allen deele kan bevredigen; het kan nl. niet anders, of de leeraren moeten, bij een vaagheid en een onvolledigheid als op blz. 82 is geschetst (het staat zoo in een leerboek) zich er elk jaar opnieuw aan stooten, zoodat ze er licht toe komen, het heele hoofdstuk over te slaan. In elk geval is dat beter, dan de slechte behandeling; een 5de en een 6de klas eischen wat anders.

Bg sin p + bg sin q; ga over op bg cos;
Bg sin p − bg sin q = bg sin $(p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2})$**;**
Bg cos p + bg cos q = bg cos $(pq - \sqrt{1-p^2}\cdot\sqrt{1-q^2})$**;**
Bg cos p − bg cos q; ga over op bg sin.
Bg tg p + bg tg q = bg tg $\frac{p+q}{1-pq}$**; valt het tweede lid negatief uit, neem dan de hoek in het tweede kwadrant.**
Bg tg p − bg tg q = bg tg $\frac{p-q}{1+pq}$**.**

Dit is alles; daar de formules volmaakt aansluiten bij die voor sin $(\alpha - \beta)$, cos $(\alpha + \beta)$, tg $(\alpha \pm \beta)$, is er niets te onthouden; de reden van het overgaan van sin op cos en bij de vierde van cos op sin is alleen deze, dat men het tweewaardig zijn wenscht te

vermijden; bij de bg tg-formules zijn p en q aan geen enkele voorwaarde gebonden, alleen dat ze evenals in de andere formules, positief zijn. Verkeert men daaromtrent in het onzekere, dan moet men gevallen onderstellen.

Het zal niet noodig zijn hier voorbeelden te geven van het gebruik van deze formules; wel bespreken we nog een paar vraagstukken, die laten zien, hoe vaag de begrippen over cyclometrische functies kunnen zijn en hoe voorzichtig men er mee dient om te gaan. Omdat die leerstof eenig denken vereischt en zoo goed als geen techniek, lijkt ze mij van veel belang voor de hoogste klas.

1. *Bereken x uit bg sin x = 2 bg sin p.*

Stel bg sin $p = \alpha$, dan wordt gevraagd naar sin 2α; die is $2 \sin \alpha \cos \alpha = 2p\sqrt{1-p^2}$; is het nu goed, als men zet $x = 2p\sqrt{1-p^2}$, zooals ik ergens vind? De sinus is inderdaad $2p\sqrt{1-p^2}$, maar zonder nader bericht, is dit antwoord, op zijn zachtst genomen, onvolledig, immers er wordt geen rekening mee gehouden, dat die waarde twee hoeken aanwijst, d.w.z. de allereerste begrippen worden weer aangetast, waar men niet genoeg op kan hameren: een hoek wordt *niet* bepaald door *één* goniometrische verhouding.

Neem maar, zooals meer gedaan, $p = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, dan komt er 2 bg sin $\frac{1}{2}\sqrt{3} =$ bgsin $\sqrt{3} . \sqrt{1-\frac{3}{4}} =$ bgsin $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; of neem: 2 bgsin $1 =$ bgsin 0; is het tweede lid nu $0°$ of $180°$? Het onvoldoende van 2 bg sin $p =$ bg sin $2p\sqrt{1-p^2}$ is *een voorbeeld van klakkelooze omzetting van goniometrie in cyclometrie, gevolg van de zeer ernstige dwaling, dat gelijke sinussen niet behoeft te beteekenen gelijke bogen......* nog al duidelijk anders!

Wat het moet zijn? De som van twee bg sin zetten we om in twee bg cos; (zie blz. 85) dus

2 bg sin $p = 2$ bg cos $\sqrt{1-p^2} =$ bg cos $\{(\sqrt{1-p^2})^2 - p^2\} =$ bg cos $(1-2p^2)$; voor $1 > 2p^2$ kan men hiervoor zetten bg sin $\sqrt{1-(1-2p^2)^2} =$ bg sin $2p\sqrt{1-p^2}$. Is echter $1 < 2p^2$, dan is bg cos $(1-2p^2)$ een hoek in het tweede kwadrant en bg cos $(1-2p^2) = 180° -$ bg cos $(2p^2-1) = 180° -$ bg sin $2p\sqrt{1-p^2}$. Aldus voor de school; zoo heel simpel is de zaak niet (in mijn reeds genoemde Leerboek wordt afgeleid 2 bg sin $p =$ bg sin $(2p^2-1) + \frac{1}{2}\pi$).

Zoo wordt via de cosinus:

$2 \text{ bg sin } \frac{1}{2}\sqrt{3} = 180^\circ - \text{bg sin } \sqrt{3} . \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 180^\circ - \text{bg sin } \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dus $3 \text{ bg sin } \frac{1}{2}\sqrt{3} = 180^\circ$, waar ieder vrede mee zal hebben.

$2 \text{ bg sin } 1 = 180^\circ - \text{bg sin } 2 \times 0 = 180^\circ$, zonder eenige twijfel zooals boven; natuurlijk zal men de formules in zulke gevallen niet toepassen, maar ze komen toch maar uit. In vraagstukken, waarin x optreedt, weet men echter niet vooraf, of die x niet 1 of 0 zal zijn.

2. *Bewijs, dat 3 bgtg* $x = bgtg \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

In orde? In het eerste voorbeeld hebben we al gezien, hoe voorzichtig men met het tweevoud moet zijn, dat er wel eenige reden is om het drievoud van een boogvorm met eenige twijfel aan de simpele omzetting van $\text{tg } 3\alpha = \dfrac{3 \text{ tg } \alpha - \text{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \text{ tg}^2 \alpha}$ aan te zien. De fout in $3 \text{ bgtg} x = \text{bgtg } \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$ zit daarin, dat van het drievoud wel de tangens wordt gegeven, maar dat niet gezegd wordt, welke hoek daarbij behoort. Van dit vraagstuk, dat ik uit een schoolboek overneem, kan men niet anders zeggen, *dan dat het misplaatst is, en ook evenals het eerste voorbeeld misleidend, omdat daardoor de verkeerde meening post vat, dat men de goniometrische formules zoo maar dom weg in cyclometrische mag omzetten.* Als immers bg tg x ligt tusschen 0° en 30°, dan is het drievoud een scherpe hoek; ligt bgtg x tusschen 60° en 90°, dan is het drievoud 180° meer dan een scherpe hoek β, maar het heeft dezelfde tangens als die scherpe hoek β. Voor $x = \frac{1}{2}$ komt er $3 \text{ bgtg } \frac{1}{2} = \text{bgtg } 5\frac{1}{2}$, voor $x = 2$ vindt men $3 \text{ bgtg } 2 = \text{bgtg } \frac{2}{11}$. Nu zal men toch zeker moeten vermelden, welke hoek er bedoeld wordt met het tweede lid $\text{bgtg } \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$. Aan de positieve waarden, die $3x - x^3$ of $1 - 3x^2$ nul maken en dus verschillende vakken voor x aanduiden, zien we ook, dat men verschillende gevallen moet onderscheiden; men vindt voor de grenzen van de intervallen $0, \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$, opv. bij 0°, 30° en 60°. Wil men vragen opgeven met getallen, en dan tweevouden en drievouden opnemen, dan is daar niets tegen; men passe echter slechts de formules toe van blz. 85; voor de school is dat het uiterste, dat bereikbaar is m.i. en het is ook voldoende.

In het kort nog eens gezegd, hoe alles eenvoudig en toch nauwkeurig kan worden behandeld:

1. α en β zijn scherpe hoeken, bepaald door een cyclometrische functie;

2. **$\alpha + \beta$ wordt bepaald door zijn cosinus;**

3. **$\alpha - \beta$ „ „ door zijn sinus;**

4. **$\alpha + \beta$ en $\alpha - \beta$ worden bepaald door de tangens.**

Er zijn dus vier formules nl.:

$$\text{bg}\cos p + \text{bg}\cos q = \text{bg}\cos\left(pq - \sqrt{1-p^2}\cdot\sqrt{1-q^2}\right);$$

$$\text{bg}\sin p - \text{bg}\sin q = \text{bg}\sin\left(p\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{1-p^2}\right);$$

$$\text{bg}\,\text{tg}\,p + \text{bgtg}\,q = \text{bgtg}\,\frac{p+q}{1-pq}$$

$$\text{bg}\,\text{tg}\,p - \text{bg}\,\text{tg}\,q = \text{bg}\,\text{tg}\,\frac{p-q}{1+pq},$$

die alle uit het hoofd zijn op te schrijven.

BOEKBESPREKINGEN.

Historische bibliotheek voor de exacte wetenschappen. Deel IV en V: *Newton's „Principia"*, door Dr. H. J. E. Beth. Groningen, P. Noordhoff, 1922.

Het is buitengewoon moeilijk in enkele weinige woorden een juist denkbeeld te geven van het hierboven genoemde werk. Men zou kunnen beginnen met den schrijver het verwijt te maken dat hij in het geheel niet geeft wat de titel belooft, nl. Newton's „Principia"; want men krijgt Newton's „Principia" in het geheel niet te zien, beter gezegd niet in hun gehéél te zien; het boek is in geenen deele een vertaling, voorzien van opmerkingen onder aan de bladzijden, die de lectuur zoo vervelend maken, al leggen ze ook nòg zoozeer getuigenis af van de reusachtige geleerdheid van den schrijver. Dr. Beth heeft zich op een gansch ander, o.i. vrij wat hooger, niveau geplaatst, waarvoor minstens evenveel geleerdheid noodig was als voor een vertaling „mit Fussnoten", maar tevens een zeer groote dosis paedagogisch talent. Misschien kan ik mijn meening het best verduidelijken door middel van het volgende beeld. Men kan het Rijksmuseum te Amsterdam bezoeken onder leiding van een der officieel toegelaten gidsen, die zich aan den ingang daarvoor aanbieden, *ziet* dan inderdaad het museum, en krijgt allerlei wetenswaardigs te hooren; maar men kan zich óók denken dat men het voorrecht heeft door den hoofddirecteur zelf te worden rondgeleid; dan ziet men het óók, maar ànders; welnu, in het boek van Dr. Beth wordt men rond geleid door den hoofddirecteur, die ons met volledige kennis van zaken juist datgene toont wat het belangrijkst en het interessantst is, en bovendien de dingen plaatst in het kader van hun tijd, d.w.z. ons uitvoerig verhaalt van wat anderen gedacht en geschreven hebben over dezelfde belangrijke onderwerpen die Newton behandelt, en ons laat zien hoe de fundamenteele ideeën die aan de natuurbeschouwing ten grondslag liggen, zich door de eeuwen heen ontwikkeld en vervormd hebben. Zoo ontmoet men in het uiterst belangrijke „Scholium aangaande Ruimte en Tijd" de meeningen van Coppernicus, Kepler en Galilei met betrekking tot de relativiteit der beweging, alsmede de namen van Huygens, Leibniz, Euler, Laplace, Lagrange, Poisson, Duhamel, Mach en Einstein; en zoo behoeft men de inhoudsopgave maar in te zien om zich voor den geest te halen *hoe* belangrijk de „Principia" zijn; hoofdstukken als de „Theorie van de maan", „De ontdekking der gravitatiewet en het ontstaan der Principia", „Verklaring van het Wereldstelsel", „De afgeplatte gedaante der planeten", „De storingen der maanbeweging", „Eb en vloed", „De Praecessie", „De Kometen", behooren toch zeker wel tot de belangrijkste onderwerpen die in de „Philosophia Naturalis" ter sprake kunnen komen.

Het spreekt van zelf dat de schrijver grooten steun heeft ontvangen van zijn trouwen medewerker Dijksterhuis, en zoo is dan door beider bemoeiingen de Nederlandsche mathematische litteratuur weer een

monumentaal werk rijker geworden; maar ik herhaal wat ik vroeger al eens gezegd heb, nl. dat het zonde en jammer is dat het boek in het Nederlandsch geschreven is; welk een invloed zou er niet van uitgaan indien het in het Duitsch of Engelsch verschenen was, vooral in het Duitsch, waar tegenwoordig, getuige de „Quellen und Studien", de belangstelling voor historisch onderzoek levendig is; door hoevelen zal het thàns grondig bestudeerd worden?

A'dam 17—9—32.

H. d. V.

P. Wijdenes en Dr. P. G. van de Vliet. Logarithmen, rente- en discontotafels. Uitgave E van Noordhoff's log. en rentetafels, 8°, 147 blz.; tweede druk; Groningen—Batavia, P. Noordhoff, 1932; geb. *f* 3,25.

Dat na zes jaar van deze tafels een nieuwe druk noodig is, is een verheugend verschijnsel. Het bewijst, dat het gebruik van rentetafels steeds meer inburgert en het omslachtige, tijdroovende en onnauwkeurige rekenen met logarithmen verdringt. Volgens het voorbericht zijn deze tafels bestemd om gebruikt te worden op de Handelshoogeschool, de Hoogere Handelsscholen, op de examens voor K XII en voor Accountant en zijn zij onontbeerlijk voor Banken, Hypotheekbanken, Spaarbanken en voor Effectenkantoren. Inderdaad zijn zij voor genoemde onderwijsinrichtingen en bankinstellingen uitnemend geschikt. Voor de H.B.S. en het Gymnasium zijn zij te uitvoerig; voor deze scholen zijn echter de beknoptere **Rentetafels D** van P. Wijdenes zeer bruikbaar.

De tafels zijn keurig uitgevoerd, zeer overzichtelijk ingericht en voldoen aan alle eischen, die men aan werken van dezen aard kan stellen. Een hulpboekje, dat aanwijzingen voor het gebruik der tafels met uitgewerkte voorbeelden bevat, is er los bijgevoegd en vergemakkelijkt voor minder geoefenden het werken er mee.

W. C. Post.

Ir. W. J. Vollewens C.-I. Repetitie-dictaat Beschrijvende Meetkunde. *3de druk.* 154 blz. 23 fig. *f* 2,90.

Inhoud: A. *Projectiemethoden:* Centrale projectie, Perspectief, Axonimetrische projectie, Scheeve parallelprojectie, Schaduwconstructies.

B. *Hulpconstructies en hulpeigenschappen.*

C. *Oppervlakken en ruimtekrommen.* Ruimtekrommen, Oppervlakken, Krommen op oppervlakken, Constructie van raakvlakken, Eenbladige hyperboloide, Hyperbolische paraboloide, Regelvlakken, Raccordeeren, Doorsnijding van oppervlakken, Raaklijnen en asymptoten, Asymptotische raakvlakken, — Opgaven — Examenopgaven.

De inhoud laat zien, dat een overzicht wordt gegeven van het geheele gebied, dat verkend moet worden door studeerenden aan de Universiteiten, gekend moet worden door candidaten K V en beheerscht moet worden door de studenten in Delft en door hen, die een of andere teekenacte M.O. willen behalen. Het werkje is daarvoor als geknipt en we raden alle klassen van gebruikers ernstig aan dit boekje naast hun boek voor herhaling te nemen. — Aan het slot vindt men de examenvraagstukken van Delft van 1904—1932.

P. W.

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VAN HET STAATSEXAMEN 1931.

De uitkomsten van de examens in de *wiskunde* waren, dat van de 209 A-candidaten resp. 27 en 35 een goed en resp. 94 en 71 een voldoend cijfer voor algebra en meetkunde behaalden. Voor de B-candidaten (27 in aantal) waren de overeenkomstige aantallen 3, 4, 3 en 12, 7, 9. Bevredigend zijn deze cijfers niet.

De opmerking, in vorige verslagen gemaakt, dat vele candidaten nog steeds heil verwachten van het memoriseeren van allerlei ingewikkelde en vaak geheel overbodige regels en formules, is ook voor dit examen onverzwakt van kracht. Dat men, om de extreme waarde van $y = 2x^2 - 4x + 7$ te bepalen, geen enkele formule moet toepassen, maar den vorm in de gedaante $y = 2(x-1)^2 + 5$ brengen, wisten slechts weinigen, de meesten schreven een van buiten geleerde algemeene uitkomst op, zonder deze te kunnen verklaren. Er waren candidaten, die deze algemeene formules kenden, maar niet de grafiek van $y = 3x$ wisten te teekenen. Het is de indruk der subcommissie voor de wiskunde, dat de candidaten zich veel meer moeten toeleggen op het door en door begrijpen van de beginselen: ingewikkelde formules worden niet gevraagd.

Bij de bespreking der wortelvormen bleek dikwijls, dat de candidaten alleen wat met wortelvormen konden werken volgens van buiten geleerde regels. Dat $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}$ is en $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$ konden de meesten niet aantoonen, enkelen trachtten deze bewijzen met behulp der gebroken exponenten te leveren. Dat $\sqrt{3}$ irrationeel is en wat dit zeggen wil, was voor velen een geheim, het bewijs leveren konden slechts enkelen.

Wel kenden een aantal candidaten de reststelling uit het hoofd, maar het eenvoudige bewijs er van konden de meesten niet leveren. Het invoeren en het verdrijven van wortels was een punt der theorie, dat voor vele candidaten groote moeilijkheden bevatte. Wanneer een breuk de waarde 0 heeft, wisten velen niet te zeggen; stelsels van vergelijkingen zooals:

$$\begin{cases} \dfrac{(3x-5y-7)(5x-2y+9)}{8x-3y+5} = 0 \\ \\ 6x-10y-11 = 0 \end{cases}$$

waren voor de meesten een raadsel.

Bij het examen in de *meetkunde* bleken vele candidaten eenvoudige definities niet te kunnen geven; wat precies bedoeld wordt met *meetkundige plaats, gelijkvormigheid, vermenigvuldiging* van een figuur, konden zij niet zeggen. Hiervoor in de plaats konden deze candidaten dan de projectiestelling, de verdubbelingsformule, de formules voor bissectrice en zwaartelijn opzeggen, dikwijls foutief en meestal zonder bewijs. Dat dit niet de methode is om meetkundig inzicht te verkrijgen, behoeft geen betoog. Bij de stereometrie bleken te veel candidaten nooit een netwerk te hebben geconstrueerd. Eenvoudige constructies, zooals die van een rechte, welke drie gegeven kruisende rechten snijdt, van een rechte, loodrecht op twee gegeven kruisende rechten, die twee andere gegeven kruisende rechten snijdt, enz., bleken veelal erg verwaarloosd. Te velen konden niet bewijzen, dat de hoek, dien een rechte met haar projectie op een vlak V maakt, kleiner is dan de hoek, dien zij met een willekeurige andere rechte van V maakt, ja, zelfs de constructie van den afstand van twee kruisende rechten gaf velen nog groote moeilijkheden.

Bij de B-candidaten is het de subcommissie opgevallen, dat velen niet wisten, dat men uit een homogene vergelijking in twee onbekenden de verhouding dezer onbekenden kan oplossen; dit verwondert de subcommissie te meer, omdat bij de afleiding van de asymptotische richtingen van een kegelsnede een gereede aanleiding bestaat om hierop te wijzen. Het schriftelijk werk werd over het algemeen niet goed gemaakt; bij het mondeling bleek, dat de oorzaak dikwijls gelegen was in een groote mate van onbeholpenheid in het hanteeren van zelfs de eenvoudigste formules. Tal van candidaten konden bijv. niet vlot de vormen sin $\frac{1}{2}(A + B)$ of cos $(A + B)$, waarin A en B twee hoeken van een driehoek voorstellen, in C uitdrukken. De vraag, h_a uit te drukken in R, A, B, C, behoort geen moeilijkheden te leveren; de beteekenis van $\dfrac{a}{\sin A}$ moet den candidaat onmiddellijk voor den geest staan.

Enkele candidaten konden niet of ternauwernood een tafel der log sin., enz. hanteeren.

Ook bij het examen in de analytische meetkunde bleek dikwijls een groot gemis aan oefening. Enkele candidaten lieten de vergelijking van een ellips in den vorm $\frac{1}{4}x^2 + 3y^2 = a^2$ staan. De afleiding van den aard der gevonden kegelsnede leverde soms nog moeilijkheden; vroeg men bij het mondeling gedeelte van het examen naar het bewijs van de toegepaste stellingen, dan bleef de candidaat veelal het antwoord schuldig of een goed begrip van de zaak bleek totaal te ontbreken. Dat de vergelijking $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ een ellips kunnen voorstellen, vernamen vele candidaten op het examen voor het eerst.

De subcommissie zou haar opmerkingen willen samenvatten in dezen raad aan toekomstige candidaten: maakt u inzicht eigen in de *eenvoudigste* grondformules en zorgt, dat ge deze *bewijzen* kunt en *toepassen* in *vraagstukken.*

Hoewel de resultaten van het examen in de *natuurkunde* aanmerkelijk gunstiger zijn dan vorige jaren, zoo zeer zelfs, dat 58 pct. der candidaten een voldoend cijfer voor dit onderdeel konden verkrijgen, neemt de subcommissie de vrijheid op verschillende tekortkomingen te wijzen.

Het schetsen van isothermen en het interpreteeren van de toestanden, die aan de punten er van beantwoorden, enz., liet dikwijls te wenschen over, evenzoo een vlotte toepassing van de wetten van Boyle — Gay Lussac; van de kritische temperatuur werd soms beweerd, dat het die temperatuur is, waarbij een gas slechts in den vloeistoftoestand kan overgaan. Als de examinator vernam, dat 1 erg ≡ 4,2 cal. is, 1 K.G.M. ≡ 42,7 cal., de naam Mayer onbekend bleek te zijn, dan was de maat vol en stapte hij vlug naar een ander gebied over. Ook daar wachtten hem dikwijls nieuwe teleurstellingen: de trillingstoestand van de lucht in orgelpijpen bijv. werd foutief opgevat, verdichtingen en verdunningen liet men zoowel in de buiken als in de knoopen optreden, zelfs werd de trillingstoestand wel eens transversaal genoemd. Het schetsen van momentopnamen van loopende transversale golfbewegingen en de opstelling van de bijbehoorende vergelijkingen kostte in het algemeen veel moeite.

Afgezien van de periodiek optredende vergissingen tusschen virtueele en reëele beelden, tusschen binnen en buiten het brandpunt, moet de subcommissie toch bekennen, dat de examns over de leer van het licht gunstig afstaken bij die van vorige jaren:

men kende de beteekenis van het optisch middelpunt, wist hoe gepolariseerd licht kon worden verkregen, was op de hoogte met de spiegelproef van Fresnel, enz., enz.

De kennis van de electriciteitsleer was over het algemeen onvoldoende. Hoewel practische toepassingen van dezen tak van de natuurkunde voor het grijpen liggen, kwam de onkunde juist aan het licht, als naar practische quaesties werd gevraagd als schakeling van ampère en voltmeters, schakeling van elementen tot een batterij, weerstand van een 100 watt, 220 voltlamp, lading van accumulatoren, sterkte van een stroom door een loopenden motor, als gevraagd werd naar de beteekenis van de gloeiende electrode, die men aantreft in vele gelijkrichters, in radiolampen en moderne Röntgenbuizen, naar de bepaling van electromotorische krachten van elementen, enz. Om niet al te veel in herhalingen te vervallen, neemt de subcommissie de vrijheid verder naar verslagen van haar voorgangsters te verwijzen.

Dat de examens in de *scheikunde* een beter resultaat opleverden dan die in de natuurkunde is met het oog op den aard van het vak wel te begrijpen, maar ook hier moesten allerlei tekortkomingen worden vastgesteld. Dat er evenals vorige jaren nogal wat haperde aan de kennis van het chemisch evenwicht, verbaasde de subcommissie niet. De evenwichtsconstante liet men niet alleen van de temperatuur afhangen, maar ook van de concentratie van de stoffen, die aan de chemische reactie deelnemen; evenwichtsvergelijkingen werden soms foutief opgesteld, het begrip concentratie onjuist gedefinieerd. Het belang van de leer van het chemisch evenwicht werd onvoldoende beseft.

Wel bevreemdde het de commissie ten zeerste, dat sommige candidaten moeite hadden met de eenvoudigste dubbelomzettingen: ze lieten een sulfaat ontstaan als men natronloog met zwaveldioxyd verzadigt, wisten niet, waarom natronloog zoo'n belangrijk reagens is, waarom sommige gevormde neerslagen oplossen in overmaat of waren niet op de hoogte met de belangrijkste ionenreacties. Verder dient men ook de structuur van zwavelzuur, salpeterzuur, enz. te kennen en met het oog op de maatanalyse te weten, wat met een gramequivalent kaliumpermanganaat, ferrosulfaat, waterstofsuperoxyde, enz. wordt bedoeld.

Dat de alcoholen met vrucht vergeleken kunnen worden met

zuren en basen, was niet algemeen bekend, evenmin de ontstaanswijze van aceton uit azijnzuur, de verzeeping van nitrillen, de beteekenis van het asymmetrisch koolstofatoom, het hydreeren van oliën, de ontstaanswijze van benzol bv. uit natriumbenzoaat, het bestaan van zoogenaamde electropositieve en negatieve groepen, enz., zoodat de subcommissie er bij de candidaten, die zich in volgende jaren aan dit examen wenschen te onderwerpen, ten sterkste op aandringt ook aan de organische chemie de noodige aandacht te besteden.

DE BEWIJSMETHODE DER VOLLEDIGE INDUCTIE

DOOR

Ir. D. J. KRUIJTBOSCH.

De bewijsmethode der volledige inductie is nog zoo goed als niet tot de beginselen der rekenkunde, zooals deze op de middelbare scholen worden behandeld, doorgedrongen. Dit is te betreuren, omdat het een dier fraaie algemeene wiskundige methoden is, die op het zuivere logische denken gebaseerd zijn en een ruim veld van toepassingen hebben. We zouden deze bewijsmethode een verificatiemethode willen noemen, waarbij de verificatie op dusdanig afdoende wijze geschiedt, dat we aan dit onderzoek volkomen bewijskracht toekennen.

Veronderstellen we, dat n de rij der natuurlijke getallen doorloopt, dan komt het er op neer, om aan te toonen dat:

1°. Een eigenschap geldig blijft voor $(n + 1)$, wanneer ze voor n als juist wordt aangenomen;

2°. Deze eigenschap moet gelden voor de kleinste waarde van n, die toelaatbaar is.

Deze twee voorwaarden involveeren een cascade van syllogismen, zooals *Poincaré* het uitdrukt.[1]) Deze reeks van syllogismen begint als volgt:

De eigenschap geldt voor $n = 1$.

---

[1]) La science et l'hypothèse. (Flammarion), p. 20.

Is ze juist voor 1, dan is ze dit ook voor 2.
Ze geldt aldus voor 2.
Is ze juist voor 2, dan is ze dit ook voor 3.
Ze geldt aldus voor 3.
Enz. enz.

Aan deze reeks van *opvolgende* bijzondere gevallen, waarvoor een eigenschap geldig is, heeft de methode den naam „methode van *volledige* inductie" te danken.

Poincaré vindt dat er een opvallende analogie met de methode der inductie in de natuurwetenschappen aanwezig is. Mij dunkt echter dat deze analogie slechts een uiterlijke is; het komt toch in de natuurwetenschappen niet voor, dat we van het eene bijzondere geval tot een ander bijzonder geval overgaan op de wijze, waarop dit bij deze mathematische methode geschiedt. Overigens wordt door *Poincaré* toegegeven, dat er een belangrijk onderscheid tusschen beide inductieve methoden bestaat; in de natuurwetenschappen toch is de toepassing der inductie steeds onzeker, omdat ze berust op het geloof in een algemeen geldende wet in de natuur, dus op iets, dat buiten de grenzen van onze kennis ligt, terwijl de mathematische inductie berust op een eigenschap van ons verstand, die ons dwingt de door inductie gevonden eigenschap algemeene geldigheid te verleenen, omdat we ons de *herhaling* van het in de cascade van syllogismen aangegeven procédé kunnen *voorstellen,* zoodra we van de juistheid der eerste opvolgende schreden overtuigd zijn.

De benaming „methode van volledige inductie" komt mij voor goed gekozen te zijn. We treffen ook andere benamingen aan, zooals: „das rekurrierende Verfahren" en ook veelvuldig: „Schlusz von n auf $(n + 1)$". In Nederlandsche boeken was het nogal eens gebruikelijk om te spreken van een Bernoulliaansch bewijs.

Meestal vindt men in de elementaire leerboeken slechts één toepassing van onze methode, nl. het bewijs van de formule voor het binomium van *Newton* voor positieve, geheele exponenten. Ik meen dit bewijs wel achterwege te mogen laten, omdat het van algemeene bekendheid is. Er blijven nog genoeg voorbeelden over, die ik nu laat volgen in willekeurige, toevallige volgorde.

I. We gaan de somformule voor een meetkundige reeks:

$$a,\ ar,\ ar^2 \ldots\ldots ar^{n-1}$$

bewijzen.